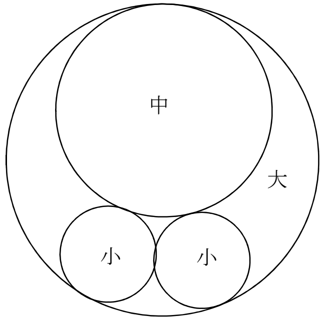
『発微算法』関　孝和著　　　　　　　　　　米光　　丁

問 1.

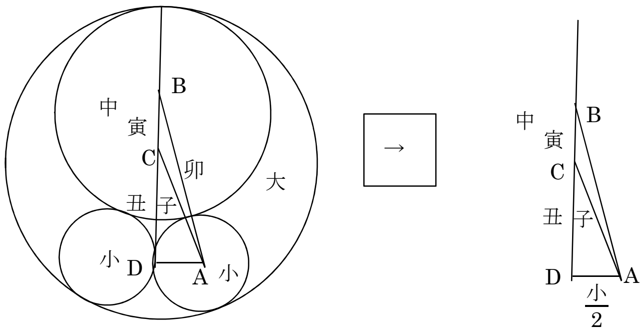
大円に中円を内接させ、その中に図のように小円 2 個を内接させる。大中小の円の直径をそれぞれ大、中、小とすると

$\frac{1}{4}(大^2-中^2-2小^2)\pi=120$,　中−小=5

の時大中小の直径はいくらか。



問. 1(解法)



A, B, C, はそれぞれ小円, 中円, 大円の中心として小, 中, 大はそれぞれの直径を表す, D は小円と小円の接点とする。

BC=寅 , AC=子 , CD=丑 , AD=$\frac{小}{2}$, −小+大=2 子、$AC^2=CD^2+AD^2$,

$\left(\frac{-小+大}{2}\right)^2=丑^2+\left(\frac{小}{2}\right)^2$

$4丑^2=-2小大+大^2$,　$-中+大=2寅$、$4寅^2=中^2-2中大+大^2$,

$中+小=2卯$、$(寅+丑)^2=卯^2-\left(\frac{小}{2}\right)^2$

$4(寅+丑)^2=中^2+2小中+小^2-小^2$　　$4(寅+丑)^2=中^2+2小中$

$4寅^2+4丑^2+8寅丑=中^2+2小中$

$中^2-2中大+大^2-2小大+大^2+8寅丑=中^2+2小中$

$8寅丑=2小中+(2中+2小)大-2大^2$

$4寅丑=小中+(中+小)大-大^2$

$16寅^2丑^2=小^2中^2+(中+小)^2大^2+大^4+2小中大(中+小)-2小中大^2$
$-2(中+小)大^3$

$=小^2中^2+中^2大^2+小^2大^2+大^4+2小中^2大+2小^2中大-$
$2(中+小)大^3$

$16寅^2丑^2=(中^2-2中大+大^2)(-2小大+大^2)$

$=-2小中^2大+4小中大^2-2小大^3+中^2大^2-2中大^3+大^4$

$小^2中^2+(4中^2+2小中)小大+(-4中+小)小大^2=0$

$小中^2+(4中^2+2小中)大+(-4中+小)大^2=0$

$(4中+2小)中大=-小中^2-小大^2+4大^2中$

$(4中+2小)^2中^2大^2=\{(4中-小)大^2-小中^2\}^2$

$(4中+2小)中大=\{(4中-小)大^2-小中^2\}$

両辺を平方して

$\{(4中-小)大^2-小中^2\}^2=(4中+2小)^2中^2大^2$・・・・・・(1)

只云数=中−小=5　　中=小+5 ・・・・・・・・・・・・・(2)

4 外余積=$\pi\{大^2-中^2-2小^2\}$・・・・・・・・・・・・・・(3)

(2)(3)を(1)に代入する

大^2＝A＝$\dfrac{4\text{外余積}}{\pi}$＋中^2＋2小^2＝$\dfrac{4\text{外余積}}{\pi}$＋(小＋云数)^2＋2小^2 とおく

[{(4(小＋云数)－小}{$\dfrac{4\text{外余積}}{\pi}$＋(小＋云数)^2＋2 小^2－小(小＋云数)^2}}^{2}

＝{4(小＋云数)＋2小}^{2}(小＋云数)^2{$\dfrac{4\text{外余積}}{\pi}$＋(小＋云数)^2＋2小^2}

大^2＝A, 只云数＝5 を代入する

＝A{4(小＋5)＋2小}^{2}(小＋5)^2

＝A(6小＋20)^2(小 2＋10小＋25)

＝4A(9小^2＋60小＋100)(小^2＋10小＋25)

＝4A(9小^4＋150小^3＋925小^2＋2500小＋2500)

A を元に戻して 4 を中に入れる

＝{$\dfrac{480}{\pi}$＋3小^2＋10小＋25}(36小^4＋600小^3＋3700小^2＋10000小＋10000)

$\dfrac{480}{\pi}$≒152.79 とすると

＝(3小^2＋10小＋177.79)(36小^4＋600小^3＋3700小^2＋10000小＋10000)

108小^6＋1908小^5＋19300.44小^4＋173674小^3＋52200小^2＋18079900小

＋1777900＝0

となり 6 次方程式になると術文はしている。

問 2.

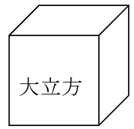
小なる正方形と大なる立方体

がある。小なる正方形と大なる立方体

の一辺を x, y とすると

$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{y^3}=10$,　x＋y＝7 が成り立つ

とき x, y を求めよ。



問 2(解法)

平方面、立方面の長さをそれぞれ x, y とする

$$\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{(7-x)^2}=10$$

両辺を平方して。$10^2=x^3+2\sqrt{x^3}\sqrt[3]{(7-x)^2}+(\sqrt[3]{(7-x)^2})^2$

$100-x^3=2\sqrt{x^3}\sqrt[3]{(7-x)^2}+\sqrt[3]{(7-x)^4}$　　10 倍して

$$10(100-x^3)=\{2\sqrt{x^3}\sqrt[3]{(7-x)^2}+\sqrt[3]{(7-x)^4}\}(\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{(7-x)^2})$$

$$=2x^3\sqrt[3]{(7-x)^2}+3\sqrt{x^3}\sqrt[3]{(7-x)^4}+(7-x)^2$$

$$10(100-x^3)-(7-x)^2=2x^3\sqrt[3]{(7-x)^2}+3\sqrt{x^3}\sqrt[3]{(7-x)^4}$$

$\{10(100-x^3)-(7-x)^2\}^2=4x^6\sqrt[3]{(7-x)^4}+12x^3\sqrt{x^3}(7-x)^2+9x^3\sqrt[3]{(7-x)^8}$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(1)

一方

$80(7-x)^2=8(7-x)^2\{\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{(7-x)^2}\}$

$(100-x^3)^2+80(7-x)^2=4x^3\sqrt[3]{(7-x)^4}+4\sqrt{x^3}(7-x)^2+\sqrt[3]{(7-x)^8}+8(7-$

$x)^2\{\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{(7-x)^2}\}=4x^3\sqrt[3]{(7-x)^4}+12\sqrt{x^3}(7-x)^2+9\sqrt[3]{(7-x)^8}$

$(1)=x^3(100-x^3)^2+80(7-x)^2$

$\{10(100-x^3)-(7-x)^2\}^2=x^3(100-x^3)^2+80(7-x)^2$

$(1)\{(1000-10x^3)-(49-14x+x^2)\}^2=\{-10x^3-x^2+14x+951)\}^2$

$100x^6+x^4+196x^2+904401+20x^5-280x^4-19020x^3-28x^3-1902x^2+26628x$

$=100x^6+20x^5-279x^4-19048x^3-1706x^2+26628x+904401$ ・・・・・(2)

$x^3(100-x^3)^2+80(7-x)^2=x^3(10000-200x^3+x^6)+80(49-14x+x^2)$

$=x^9-200x^6+10000x^3+80x^2-1120x+3920$ ・・・・・・・・・(3)

(2)＝(3)

$x^9-300x^6-20x^5+279x^4+29048x^3+1786x^2-27748x-900481=0$

$\{3\sqrt{y^3}(\sqrt[3]{x^2})^2+2y^3\sqrt[3]{x^2}\}^2=\{(\text{只}^2-y^3)\text{只}-x^2\}^2$ ・・・・・・・(4)

次に $8(\sqrt[3]{x^2})^4+8x^2\sqrt{y^3}=\text{只}\,8x^2$　, $\{2\sqrt{y^3}\sqrt[3]{x^2}+(\sqrt[3]{x^2})^2\}^2=(\text{只}^2-y^3)^2$

$4y^3(\sqrt[3]{x^2})^2+4\sqrt{y^3}x^2+(\sqrt[3]{x^2})^4=(\text{只}^2-y^3)^2$

$4(y^3)^2(\sqrt[3]{x^2})^2+12(\sqrt{y^3})^3x^2+9y^3(\sqrt[3]{x^2})^4=\{\text{只}\,8x^2+(\text{只}^2-y^3)^2\}y^3$ ・・(5)

(4)(5)の左辺は等しい　$\{(\text{只}^2-y^3)\text{只}-x^2\}^2=\{\text{只}\,8x^2+(\text{只}^2-y^3)^2\}y^3$

$y^3=\text{甲}$　,　$(\text{別}-y)^2=x^2=\text{乙}$

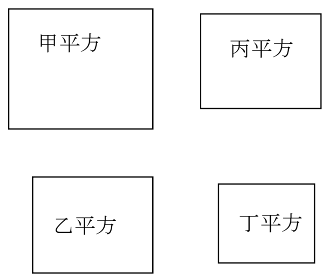
$\text{只}^2-\text{甲}=\text{只}^2-y^3=\text{丙}$　$8\,\text{只乙}=8\,\text{只}(\text{別}-y)^2=\text{丁}$

$\{(\text{只}^2-y^3)\text{只}-x^2\}^2=\{\text{只}\,8x^2+(\text{只}^2-y^3)^2\}y^3$

$\{(\text{丙只}-\text{乙}\}^2=\{(\text{只}^2-y^3)\text{只}-(\text{別}-y)\}^2y^3$

又$\{(\text{丙}^2+\text{丁})\text{甲}=\{(\text{只}^2-y^3)^2+8\,\text{只}(\text{別}-y)^2\}y^3$ これを述べている。

問 3. これも前問と同じで甲乙丙丁おのおの一つあり、甲方面は乙方面より、3 寸短い、乙方面は丙方面より、7 寸短い、丙方面は丁方面より、23 寸短い、別に甲乙丙丁方面は別々に実を為して立方に開く見商の寸各々4 和 55 寸となる。甲乙丙丁方面はいくばくなるか。



問.3(解法)

甲乙丙丁の一辺をそれぞれ甲乙丙丁とすると

甲－乙＝3, 乙－丙＝7, 丙－丁＝23, $\sqrt[3]{甲}+\sqrt[3]{乙}+\sqrt[3]{丙}+\sqrt[3]{丁}=55$

丁方面＝x とする。

丙＝x＋23 ,乙＝x＋30 , 甲＝x＋33 ,

$\sqrt[3]{x+33}+\sqrt[3]{x+30}+\sqrt[3]{x+23}+\sqrt[3]{x}=55$

左辺の各々を X,Y,Z,W で表せば

$X+Y+Z+W=55$

$X+Y=s_2$ とおき $X^3=(s_2-Y)^3$ を計算する。

$X^3=s_2{}^3-3s_2{}^2Y+3s_2Y^2-Y^3$ となり

$(-X^3-Y^3+s_2{}^3)-3s_2{}^2Y+3s_2Y^2=0$

$X+Y=s_2$ とすると $X=s_2-Y$　　$X+Y+Z=s_3$　とすると $s_3=W-55$

$X^3=s_2{}^3-3s_2{}^2Y+3s_2Y^2-Y^3$

$(-X^3-Y^3+s_2{}^3)-3s_2{}^2Y+3s_2Y^2=0$

$(-X^3-Y^3+s_2{}^3)=a$, $-3s_2{}^2=b$, $3s_2=c$ とすれば

$a+bY+cY^2=0$ となり両辺を 3 乗する。

$(a+bY)^3=-c^3Y^6$ だから

$a^3+b^3Y^3+3a^2bY+3ab^2Y^2=-c^3Y^6$

$a^3+b^3Y^3+c^3Y^6+3abY(a+bY)=a^3+b^3Y^3+c^3Y^6-3abcY^3=0$

$(-X^3-Y^3+s_2{}^3)^3-27s_2{}^6Y^3+27s_2{}^3Y^6-27(-X^3-Y^3+s_2{}^3)s_2{}^3Y^3=0$・・・(1)

となり、更に

$X+Y+Z=s_3$ とすれば

$s_2=s_3-Z$

$s_2{}^3=s_3{}^3-3s_3{}^2Z+3s_3Z^2-Z^3$・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(2)

(2)を(1)に代入する。

(1)は$(-X^3-Y^3+s_2{}^3)^3$ などより Z の 9 次式となる。

更に W のみの式にするために

$(-X^3-Y^3+s_2{}^3)^3-27s_2{}^6Y^3+27s_2{}^3Y^6-27(-X^3-Y^3+s_2{}^3)s_2{}^3Y^3=0$

の展開式を

$f_1+f_2Z+f_3Z^2+f_4Z^3+f_5Z^4+f_6Z^5+f_7Z^6+f_8Z^7+f_9Z^8+f_{10}Z^9=0$

として $X^3=W^3+33$,$Y^3=W^3+30$, $Z^3=W^3+23$,$s_3=W-55$ だから

Z^3 ,Z^6, Z^9 をグループとして考えて

$(f_1+f_4Z^3+f_7Z^6+f_{10}Z^9)+(f_2+f_5Z^3+f_8Z^6)Z+(f_3+f_6Z^3+f_9Z^6)Z^2=0$

$f_1+f_4Z^3+f_7Z^6+f_{10}Z^9=A$　,$f_2+f_5Z^3+f_8Z^6=B$, $f_3+f_6Z^3+f_9Z^6=C$

$A+BZ+CZ^2=0$ とすると

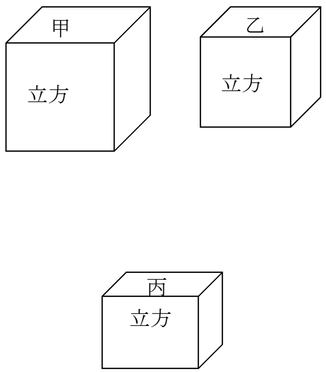
$A^3+B^3Y^3+C^3Y^6-3ABCY^3=0$ だから

$X^3=W^3+33$　, $Y^3=W^3+30$, $Z^3=W^3+23$, $s_3=W-55$

$A^3=\{(W^3)^3\}^3=W^{27}=$すなわち W の 27 次方程式になる。

孝和は$\sqrt[3]{\text{甲}}$、$\sqrt[3]{\text{乙}}$、$\sqrt[3]{\text{丙}}$、$\sqrt[3]{\text{丁}}$を未知数として 27 次方程式を 4 ページにわたり書いている。

問 4. 今甲乙丙の立方おのおの一つあり、只云甲積と乙積併せて共に寸だて 137340 坪(立法寸)、又乙積と丙積併せて共に寸だて 12175 坪(立法寸)、別に甲方面寸を実となし平方に開く見商寸と乙方面寸を実となし立方に開く見商寸、丙方面寸を実となし三乗に開く見商寸、おのおのの三和は 12 寸とき、甲乙丙の立方体の一辺はいくらか。



問 4. (解法)

$\text{甲}^3+\text{乙}^3=137340$　　　$\text{乙}^3+\text{丙}^3=121750$

$\sqrt{\text{甲}}+\sqrt[3]{\text{乙}}+\sqrt[4]{\text{丙}}=12$　孝和は$\sqrt[4]{\text{丙}}$を Z として 108 次方程式を得ている。

甲, 乙, 丙を x, y, z とすると

$x^3+y^3=137340$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(1)

$y^3+z^3=121750$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(2)

$\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[4]{z}=12$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(3)

$\sqrt{x}=X$, $\sqrt[3]{y}=Y$, $\sqrt[4]{z}=Z$, $X+Y=s$ とおく　$Y=s-X$

$Y^3=s^3-3s^2X+3sX^2-X^3$ となり

$Y^3=(y^3)^3=(s^3-3s^2X+3sX^2-X^3)^3$

$=s^9-9s^8X+36s^7X^2-84s^6X^3+126s^5X^4-126s^4X^5+84s^3X^6-36s^2X^7+9sX^8-X^9$

$Y^3=y^3$, $X^2=x$, $X^3=xX$, $X^4=x^2$, $X^5=x^2X$, $X^6=x^3$, $X^7=x^3X$, $X^8=x^4$, $X^9=x^4X$

$(-y^3+s^9+36s^7x+126s^5x^2+84s^3x^3+9sx^4)-(9s^8+84s^6x+126s^4x^2+36s^2x^3+x^4)X=0$

$-y^3+s^9+36s^7x+126s^5x^2+84s^3x^3+9sx^4=A$, $9s^8+84s^6x+126s^4x^2+36s^2x^3+x^4=B$ とすると

$A-BX=0$　　　, $A^2-B^2X^2=0$　, $A^2-B^2x=0$

$(-y^3+s^9+36s^7x+126s^5x^2+84s^3x^3+9sx^4)^2-(9s^8+84s^6x+126s^4x^2+36s^2x^3+x^4)^2x=0$

$C+Dx+Ex^2=0$ とすると

$C^3+D^3x^3+E^3x^6-3CDEx^3=$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(4)

(3) より $s=12-Z$

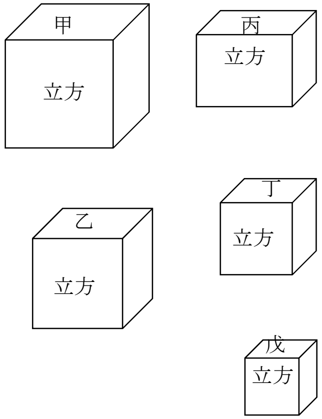
(2) より $y^3=121750-Z^3$

(1) より $x^3=137340-y^3=15590+Z^{12}$

(4) に代入すると

Zとして108次方程式を得ている。

問5.
甲、乙、丙、丁、戊の
立方体でそれぞれの一辺
が等差をなし一辺を甲乙丙
丁戊とすれば
甲^3＋乙^3＝700
丙^3＋丁^3＋戊^3＝500
甲－乙＝乙－丙＝丙－丁
＝丁－戊
なる条件で甲乙丙丁戊を求
める。



問5(解法)

丁＝戊＋d　，丙＝戊＋2d

丁積＝丁^3＝戊^3＋3戊^{2}d＋3戊d^2＋d^3

丙積＝丙^3＝戊^3＋6戊^{2}d＋12戊d^2＋8d^3　,戊積＝戊^3

丙^3＋丁^3＋戊^3＝3戊^3＋9戊^{2}d＋15戊d^2＋9d^3＝500・・(前式)

乙＝戊＋3d　，甲＝戊＋4d

乙積＝乙^3＝戊^3＋9戊^{2}d＋27戊d^2＋27d^3

甲積＝甲^3＝戊^3＋12戊^{2}d＋48戊d^2＋64d^3

甲^3＋乙^3＝2戊^3＋21戊^{2}d＋75戊d^2＋91d^3＝700・・(後式)

(前式)×3－(前式)×7

－15戊^3＋120戊d^2＋210d^3＝－1400

120戊d^2＋210d^3＝15戊^3－1400

(前式)×91－(後式)×9

225戊^3＋630戊^{2}d＋690戊d^2＝39200

630戊^{2}d＋690戊d^2＝15戊^3－1400

120戊d^2＋210d^3＝A　，630戊^{2}d＋690戊d^2＝B

dを消去するため戊^{3}d^{6}とするため戊^{3}A^{2}とB^{3}を両辺に掛ける

各第二項は210×210戊^{3}A^{2}と690×690×690戊^{3}d^{6}とすれば

よいが49×900と365010×900を交互に掛ければ戊^{3}d^{6}は同じになる。

365010戊^{3}A^2＝365010戊^3(14400戊^{2}d^4＋50400戊d^5＋44100d^6)

＝5256144000戊^{5}d^4＋18396504000戊^{4}d^5

＋16096941000戊^{3}d^6・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(1)

49B^3＝49(250047000戊^{6}d^3＋821583000戊^{5}d^4＋899829000戊^{4}d^5

＋328509000戊^{3}d^6

＝12252303000戊^{6}d^3＋40257567000戊^{5}d^4＋44091621000戊^{4}d^5

＋16096941000戊^{3}d^6・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(2)

(1)－(2)

5256144000戊^{5}d^4＋18396504000戊^{4}d^5＋16096941000戊^{3}d^6

－(12252303000戊^{6}d^3＋40257567000戊^{5}d^4＋44091621000戊^{4}d^5

＋16096941000戊^{3}d^6)

＝－12252303000戊^{6}d^3－35001423000戊^{5}d^4－25695117000戊^{4}d^5

d^{5}の係数は－25697117000この項を消去するためkABd^{3}を作る

2569617000÷(210×690)＝177330

177330 AB戊^3＝177330戊^3 (120戊d^2＋210d^3)(630戊^{2}d＋690戊d^2)

＝177330戊^3(75600戊^{3}d^3＋82800戊^{2}d^4＋132300戊^{2}d^4＋144900戊d^5)

＝13406148000 戊^{6}d^3＋38143683000 戊^{5}d^4＋25695117000 戊^{4}d^5・・(3)

(1)－(2)＋(3)で d^5 も消去できる

－12252303000 戊^{6}d^3－35001423000 戊^{5}d^4－25695117000 戊^{4}d^5

＋13406148000 戊^{6}d^3＋38143683000 戊^{5}d^4＋25695117000 戊^{4}d^5

＝1153845000 戊^{6}d^3＋3142260000 戊^{5}d^4

＝d^4 は 3142260000

3142260000÷690^2＝6600

6600 戊^{3}B^2＝6600 戊^3(630 戊^{2}d＋690 戊 d^2)^2

＝6600 戊^3(396900 戊^{4}d^2＋869400 戊^{3}d^3＋476100 戊^{2}d^4

＝2619540000 戊^{7}d^2＋5738040000 戊^{6}d^3＋3142260000 戊^{5}d^4・・・(4)

(1)－(2)＋(3)－(4)で

1153845000 戊^{6}d^3＋3142260000 戊^{5}d^4－(2619540000 戊^{7}d^2

＋5738040000 戊^{6}d^3＋3142260000 戊^{5}d^4)

＝－2619540000 戊^{7}d^2－4584195000 戊^{6}d^3

d^3 の係数－4584195000

4584195000÷210＝21829500

21829500 戊^{6}A＝21829500 戊^6(120 戊 d^2＋210d^3)

＝2619540000 戊^{7}d^2＋4584195000 戊^{6}d^3・・・・・・・・・・・(5)

(1)－(2)＋(3)－(4)＋(5)

－2619540000 戊^{7}d^2－4584195000 戊^{6}d^3

＋2619540000 戊^{7}d^2＋4584195000 戊^{6}d^3＝0

となり従って

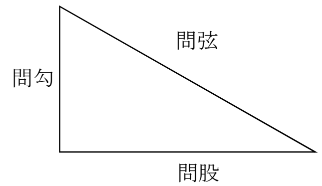
(1)－(2)＋(3)－(4)＋(5)

＝365010 戊^{3}A^2－49B^3＋177330 AB 戊^3－6600 戊^{3}B^2＋21829500 戊^{6}A ＝0

120 戊 d^2＋210d^3＝A　，630 戊^{2}d＋690 戊 d^2＝B

最初の項 365010 戊^{3}A^2 の項は A^2 で戊^2 これは戊の 9 次方程式である。

問 6. 勾^3＋弦^3＝700, 股^3＋弦^3＝900**,** 勾^2＋股^2＝弦^2, より股、弦を消去する。



問 6(解法)

弦^3＝700－勾^3　,股^3＝900－700＋勾^3＝200＋勾^3

弦^6＝(勾^2＋股^2)^3＝勾^6＋3 勾^{4}股^2＋3 勾^{2}股^4＋股^6

弦^6－勾^6－股^6＝3 勾^{2}股^2(勾^2＋股^2)＝3 勾^{2}股^{2}弦^2

(弦^6－勾^6－股^6)^3＝27 勾^{6}股^{6}弦^6

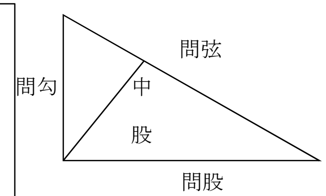
弦^6＝(700－勾^3)^2 ，股^6＝(200＋勾^3)^2

{(700－勾^3)^2－勾^6－(200＋勾^3)^2)^3＝27 勾^6(200＋勾^3)^2(700－勾^3)^2

こうして勾の 18 次方程式を求める。

問 7. $\sqrt{\text{勾}}+\sqrt[3]{\text{股}}=20$, $\sqrt[3]{\text{勾}}+\sqrt[4]{\text{中股}}$＝5**,** 勾^2＋股^2＝弦^2　,中股・弦＝勾・股

$\sqrt[3]{\text{勾}}$の 36 次方程式を得ている。



問 6（解法）

勾、股、弦、中股を x, y, z, w とすれば

$\sqrt{z}+\sqrt[3]{y}=20$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(1)

$\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{w}=5$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(2)

$xy=wz$・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(3)

$x^2+y^2=z^2$・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(4)

(2)から $w=(5-\sqrt[3]{x})^4$・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(5)

短弦＝t とすると

$t^2=x^2-w^2=x^2-(5-\sqrt[3]{x})^8$・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(6)

$t^2z^2=x^4$・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(7)

(1)より

$\sqrt[3]{y}=20-\sqrt{z}$

$xy=x(20-\sqrt{z})^3=x(20^3-3\times 20^2\sqrt{z}+3\times 20z-z\sqrt{z})=wz$

$20^3x+(3\times 20x-w)z-(3\times 20^2+z)x\sqrt{z}=0$

$\{20^3x+(3\times 20x-w)z\}^2-(3\times 20^2+z)^2x^2z=0$

$20^6x^3+2\times 20^3x(3\times 20x-w)xz+(3\times 20x-w)^2z^2-9\times 20^4x^2z-6\times 20^2x^2z^2+$

$-z^2z^3=0$

$A+Bz+Cz^2+Dz^3=0$

$(A+Cz^2)+(B+Dz^2)z=0$

$\{20^6x^3+(3\times 20^2x^2-6\times 20xw+w^2)z^2\}-\{\{2\times 20^3xw+3\times 20^4x^2\}+x^2z^2\}z=0$

t^2 を掛けて $t^2z^2=x^4$ とする。

$\{20^6x^3t^2+(3\times 20^2x^2-6\times 20xw+w^2)x^4\}-\{\{2\times 20^3xw+3\times 20^4x^2\}t^2-x^6\}z=$

0

これを $E-Fz=0$ とすれば $E^2-F^2z^2=0$ ， $E^2-F^2G^4=0$

E, F の中に t^2, w を含むが(5)(6)によりいずれも $\sqrt[3]{x}$ で表すことができる。

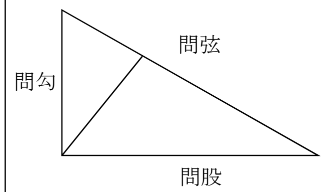
この方程式は $\sqrt[3]{x}$ の方程式になり、18 次方程式になり、$\sqrt[3]{x}$ の値を求めて

x を求めて y, z の値を求めることができる。

問 8. $\sqrt[3]{勾+股+弦}+\frac{1}{2}勾\cdot股=500$

勾 ^{3}＋股 ^{3}＝90000 ，勾 ^{2}＋股 ^{2}＝弦 ^{2}

$\sqrt[3]{勾+股+弦}$ の 18 次方程式を得ている。



問 8.（解法）

$\sqrt[3]{勾+股+弦}+\frac{1}{2}勾\cdot股=500$・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(1)

勾 ^{3}＋股 ^{3}＝90000・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(2)

勾 ^{2}＋股 ^{2}＝弦 ^{2}・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(3)

$\sqrt[3]{勾+股+弦}=x$ とおく

勾＋股＋弦＝x^3 ， 弦＝x^3－(勾＋股)両辺を平方して

(3)を代入すると

$0=x^6-2x^3(勾+股)+2勾股$

(1)式より $2x+勾\cdot股=1000$ を代入して

$0=x^6-2x^3(勾+股)+4x-2000$

$$勾+股=\frac{x^6+4x-2000}{2x^3}$$

(2)式より勾^3＋股^3＝90000　　$(勾+股)^3-3勾股(勾+股)=9000$

$$\left(\frac{x^6+4x-2000}{2x^3}\right)^3-3(1000-2x)\left(\frac{x^6+4x-2000}{2x^3}\right)=9000$$

分母を払って

$(x^6+4x-2000)^3-3(1000-2x)(x^6+4x-2000)=72000x^3$

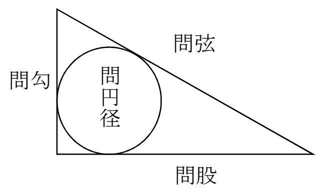
これはxの18次方程式となることがわかる。

問 9. $\frac{1}{2}勾\cdot股-\left(\frac{円径}{2}\right)^2\pi=150$

勾^3＋股^3＝900 勾^2＋股^2＝弦^2

円径＝勾＋股－弦

より円径の6次方程式を得ている



問. 9(解法)

$\frac{1}{2}勾\cdot股-\left(\frac{円径}{2}\right)^2\pi=150$・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(1)

勾^3＋股^3＝900・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ (2) ，

勾^2＋股^2＝弦^2

円径＝x とおくと

$x=勾+股-弦$　　　弦＝勾＋股－x

$弦^2=(勾+股)^2-2x(勾+股)+x^2$

$0=2勾股-2x(勾+股)+x^2$

$\frac{1}{2}勾\cdot股-\left(\frac{円径}{2}\right)^2\pi=150$　　　$2勾\cdot股-x^2\pi=600$

$$勾股=\frac{1}{2}(x^2\pi+600)$$

$0=x^2\pi+600-2x(勾+股)+x^2$　　　$勾+股=\frac{1}{2x}\{x^2(\pi+1)+600\}$

勾^3＋股^3＝900

$(勾+股)^3-3勾股(勾+股)=900$

$$\left(\frac{1}{2x}\{x^2(\pi+1)+600\}\right)^3-\frac{3}{2}(x^2\pi+600)\left(\frac{1}{2x}\{x^2(\pi+1)+600\}\right)=900$$

分母を払って

$\{x^2(\pi+1)+600\}^3-6(x^2\pi+600)\{x^2(\pi+1)+600\}=7200x^3$

円径の6次方程式を得る。

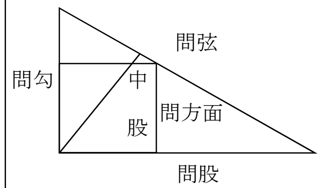
問 10. $\frac{1}{2}$勾・股－(方面)^2＝350

$\frac{5}{7}$股＋$\frac{2}{3}$中股＝45, 勾^2＋股^2＝弦^2

中股 ： 股＝勾 ： 弦

方面(勾＋股)＝勾・股

股に関する 10 次方程式



問 10(解法)

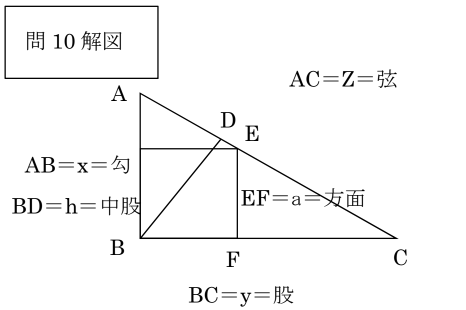
勾＝x, 股＝y,

方面(正方形の一辺)＝a ,

中股＝h とする。

$\frac{1}{2}xy-a^2=b=350$

$\frac{5}{7}y+\frac{2}{3}h=c=45,\quad x^2+y^2=z^2,$



$a(x+y)=xy$ より $a=\frac{xy}{x+y}$ ・・・(1), $hz=xy$ より $h=\frac{xy}{z}$ ・・(2)

$\frac{2}{3}h=c-\frac{5}{7}y$ 分母を払う $14h=21c-15y$

$14xy=\sqrt{x^2+y^2}(21c-15y)$

両辺を平方して

$196x^2y^2=(x^2+y^2)(21c-15y)^2$

$x^2\{(21c-15y)^2-196y^2\}=-y^2(21c-15y)^2$

$x^2(29y^2-630cy+441b^2)=-y^2(21c-15y)^2$

$$x^2=\frac{-y^2(21c-15y)^2}{29y^2-630cy+441b^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(3)}$$

$\frac{1}{2}xy-a^2=b$ に $a=\frac{xy}{x+y}$を代入する

$xy-2(\frac{xy}{x+y})^2=2b\qquad xy(x+y)^2-2x^2y^2=2b(x+y)^2$

$xy(x^2+y^2)=2b(x+y)^2$ 平方する。

$x^2y^2(x^4+2x^2y^2+y^4)=4b^2(x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4)$

$x^4(x^2y^2-4b^2)+2x^2y^2(x^2y^2-12b^2)+y^4(x^2y^2-4b^2)-16b^2xy(x^2+y^2)=0$

$(x^2y^2-4b^2)(x^4+2x^2y^2+y^4)-16b^2xy(x^2+y^2)=0$

$(x^2y^2-4b^2)(x^2+y^2)\{(x^2+y^2)-16b^2xy\}=0$

計算は複雑になるので第一項だけ考えて$(x^2y^2-4b^2)(x^2+y^2)\{(x^2+y^2)=$

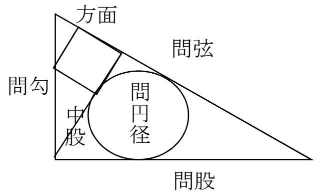
$(x^2y^2-4b^2)(x^2+y^2)^2$

$x^6y^2=(\frac{-y^2(\ 21c-15y)^2}{29y^2-630cy+441b^2})^3y^2$

第一項の分子だけを平方して計算してみると$\{-y^2\times(-y)^2\}^3\times y^2$ は y の 14 乗の方程式になる。

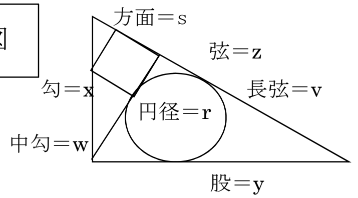
孝和の解は 10 乗の方程式になるとあるがどのように計算しても 14 乗の方程式になる。

問 11. 円径－方面＝16.5 寸
弦－股＝5.5 寸のとき、勾股弦
円径の長さはいくらか。
股に関する 10 次方程式



問 11(解法)

問 11. 解図



勾＝x，股＝y，弦＝z，
円径＝r，方面＝s，
中勾＝w，
弦＝股＋(b＝5.5)
円径 r－方面 s＝16.5＝a(先数)

円径＝長弦＋中勾－股　，方面:(中勾－方面)＝勾: 股
弦 ： 股＝勾 ： 中勾　　勾(中勾－方面)＝股方面
勾股＝中勾弦　　方面:(中勾－方面)＝中勾: 長弦
中勾(中勾－方面)＝長弦方面
. 勾 ：弦＝中勾 ：股　　中勾・弦＝勾・股
短弦 ：中勾＝ 勾: 股　　中勾・勾＝短弦・股
短弦股－中勾方面＝長弦方面

方面(長弦＋中勾)＝短弦股
短弦 ： 中勾＝ 中勾: 長弦
弦・a＝q とする。
$(by+q)^2=z^2(w-s)^2$ とする。
弦＝股＋5.5
演段
円・弦－方面・弦＝弦(円径 r－方面 s)・・・甲位
又云数＝弦－股・・(1) ，円径＝中勾＋長弦－股・・(2)，
股^2＝弦長弦・・・・(3)
{股・又云数＋(股＋又数)・先数)}^{2}
＝(5.5 股＋16.5 弦)^2
＝(5.5 股＋16.5(股＋5.5))^2
＝(22 股＋90.75)^2

{股(弦－股)＋弦(中勾＋長弦－股－方面)^2
＝(股弦－股^2＋弦中勾＋弦長弦－股弦－弦方面)^2　(3)を代入して
＝(弦中勾－弦方面)^2
＝弦^2(中勾－方面)^2・・・・・・・・・・・・・・・乙位
勾^2＋股^2＝弦^2　　勾 ：股 ＝方面 ：(中勾－方面)
勾^2×乙位＝勾^2×弦^2(中勾－方面)^2　　股方面＝勾(中勾－方面)
＝勾^2×弦^2(中勾－方面)^2
＝股^{2}弦^{2}方面^2・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(丙位)
股^2×乙位＝股^2×弦^2(中勾－方面)^2・・・・・・・・・・・・・(丁位)

股^4×勾^2＝股^{2}股^2×勾^2×弦^2×$\frac{1}{弦^2}$＝股^{2}弦^{2}中勾^2・・・・・・(戊位)

{戊－(丙位＋丁位)}^{2}＝{股^{2}弦^{2}中勾^2－(股^{2}弦^{2}方面^2＋股^2×弦^2(中勾－方面)^2)}^{2}

＝股^{4}弦^4{(中勾^2－方面^2－(中勾－方面)^2}^{2}

＝股^{4}弦^4{(中勾－方面)^2(2 方面)^2・・・・・・・・・・・・・・・・・・左

4 丙丁

4 丙丁＝股^{4}弦^4{(中勾－方面)^2(2 方面)^2

＝股^4(勾^4＋股^4){(中勾－方面)^2(2 方面)^2・・・・・・・・・・・・・・・右

右＝左

勾(中勾－方面)＝股方面

＝股^4(勾^2(中勾－方面)^2＋股^2{(中勾－方面)^2(2 方面)^2

＝股^4(股^{2}方面^2＋2 勾^{2}股^2＋股^4)(中勾－方面)^2(2 方面)^2

4 勾^2×{股・又云数＋弦(円径－方面)}^{4}股^2

＝4(勾^2－股^2){股・(弦－股)＋(股＋又数)(円径－方面)}^{4}股^2

＝4{(股＋5.5)^2－股^2}×{5.5 股＋16.5(5.5＋股)}^{4}股^2

＝(44 股＋121)×{22 股＋90.75)}^{4}股^2

弦^2(中勾－方面)^2＝(股・又云数＋弦(円径 r－方面 s)^2

＝(5.5 股＋16.5 弦)^2

＝4 股^4(股＋5.5)^{2}方面^2(5.5 股＋16.5(股＋5.5))^2

ここで又云数＝弦－股を代入すると

＝4 股^4(股＋5.5)^{2}方面^2(股(弦－股)＋16.5(股＋5.5))^2

これは股方面＝勾(中勾－方面)だから

＝4 股^2(股＋5.5)^{4}勾^2(中勾－方面)^4

＝4 股^2(股＋5.5)^{4}勾^2(中勾－円径＋16.5)^4

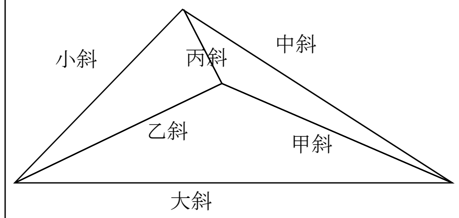
＝4 股^2(股＋5.5)^{4}勾^2(股－長弦＋16.5)^4

＝4 股^2(股＋5.5)^{4}股^2(円径－16.5)^2

＝4 股^2(股＋5.5)^{4}股^2(中勾＋長弦－股－16.5)^2

として股 10 次方程式と考えただろうか。

問 12. 丙斜＝1.447 寸,
乙斜＝4 寸, 甲斜＝6 寸
大斜^3＋小斜^3＝637 坪
中斜^3＋大斜^3＝855 坪のとき
大中小斜の長さはいくらか。



問 12(解法)

大^{2}丙^2(中^2＋小^2＋乙^2＋甲^2)－大^{2}丙^4－大^{4}丙^2

＋中^{2}乙^2(大^2＋小^2＋丙^2＋甲^2)－中^{2}乙^4－中^{4}乙^2

＋小^{2}甲^2(大^2＋中^2＋乙^2＋丙^2)－小^{2}甲^4－小^{4}甲^2

＝大^{2}中^{2}小^2＋大^{2}乙^{2}甲^2＋中^{2}甲^{2}丙^2＋小^{2}丙^{2}乙^2

甲斜＝a＝6 寸, 乙斜＝b＝4 寸, 丙斜＝c＝1.447 寸,

大斜＝x, 中斜＝y, 小斜＝z とおく

$x^3+z^3=637$・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(1)

$x^3+y^3=855$・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(2)

$x^2+y^2-z^2=2qx$

$4x^2y^2-(x^2+y^2-z^2)^2=4x^2(y^2-q^2)=4p^2x^2$

$x^2+a^2-b^2=2rx$

$4a^2x^2-(x^2+a^2-b^2)^2=4s^2x^2$

$y^2-a^2+b^2-z^2=2tx$

$y^4+a^4+b^4-2a^2y^2+2b^2y^2-2a^2b^2-2(y^2-a^2+b^2)z^2+z^4=4t^2x^2$

$4c^2x^2-y^4-a^4-b^4+2a^2y^2-2b^2y^2+2a^2b^2+2(y^2-a^2+b^2)z^2-z^4=4u^2x^2$

$a^4+b^4+x^2y^2+b^2y^2-a^2x^2-b^2y^2-2c^2x^2-2a^2b^2+(x^2+a^2-y^2)z^2=2x^2(p^2-s^2-u^2)=4sux^2$

$A+Bz^2+Cz^4=16s^2u^2x^4$ とする。

$D+Ez^2+Fz^4=16s^2u^2x^4$

$(A-D)+(B-E)z^2+(C-F)z^4=0$

$4x^2$ で約して簡単にして

$P+Qz^2+Rz^4=0$ とする。

$P^2+Q^3z^6+R^3z^{12}-3PQRz^6=0$

P,Q,R は x,y,のみの関数である。これに $z^3=637-x^3$ を代入すれば z は消去され、z は 12 次式の方程式となる。

$f_1+f_2y^2+f_3y^4+f_4y^6+f_5y^8+f_6y^{10}+f_7y^{12}=0$

として

$(f_1+f_4y^6+f_7y^{12})+(f_2+f_5y^6)y^2+(f_3+f_6y^6)y^4=0$

$f_1+f_4y^6+f_7y^{12}=A_1$, $f_2+f_5y^6+f_8v^6=B_1$, $f_3+f_6y^6=C_1$

$A_1+B_1y^2+C_1y^4=0$ とすると

$A_1^3+B_1^3y^6+C_1^3y^{12}-3A_1B_1C_1y^6=0$ だから

これに $y^3=855-x^3$ を代入すれば y は x についての 54 次方程式をえる。

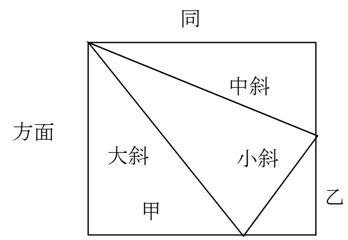
$4x^2(u^2-e^2)=4(c+d)^2x^2$

問 13.

大斜 ^{3}＋小斜 ^{3}＝3817 坪

中斜 ^{3}＋大斜 ^{3}＝5572 坪

平方面 12 寸のとき大中小斜はいくらか。



問 13(解法)

大斜 ^{3}＋小斜 ^{3}＝3817・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(1)

中斜 ^{3}＋大斜 ^{3}＝5572・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(2)

甲 ^{2}＝大斜 ^{2}－方面 ^{2} ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(3)

乙 ^{2}＝小斜 ^{2}－(方面－甲)^2

(方面－乙)^2＝中斜 ^{2}－方面 ^{2}

乙を消去して、甲に関する方程式を作る。

乙＝方面$-\sqrt{中斜^2-方面^2}$

$(方面-\sqrt{中斜^2-方面^2})^2=小斜^2-(方面-甲)^2$

$方面^2-2方面\sqrt{中斜^2-方面^2}+中斜^2-方面^2=小斜^4-2小斜^2(方面-甲)^2+(方面-甲)^4$

$2方面\sqrt{中斜^2-方面^2}=中斜^2-小斜^4+2小斜^2(方面-甲)^2-(方面-甲)^4$

a＝12,

$x^3+z^3=3817$・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(1)

$x^3+y^3=5572$・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(2)

$a-p=q$

$z^2-(a-p)^2=r^2$

$(z^2-a^2)+2px-p^2=r^2$

$r^2-a^2=s^2$

$a^2-(z^2-a^2)-2ap+p^2-y^2+a^2=a^2-r^2-s^2=2rs$

$(3a^2-y^2-z^2)-2ap+p^2=2rs$

$(3a^2-y^2-z^2)^2-4a(3a^2-y^2-z^2)p+(10a^2-2y^2-2z^2)p^2-4ap^2+p^4=4r^2s^2$

$(5a^4+y^4+z^4-2a^2y^2-2a^2z^2-2y^2z^2)+4(az^2-a^3-ay^2)p+(6a^2+2y^2-2z^2)p^2$

$-4p^3=0$・・・・・(10)

$A=5a^4+y^4+z^4-2a^2y^2-2a^2z^2-2y^2z^2$, $B=az^2-a^3-ay^2$, $C=6a^2+2y^2-2z^2$,

$D=-4$

$A+Bp+Cp^2+Dp^3=0$ とする

$(A+Cp^2)+(B+Dp^2)p=0$

$(A+Cp^2)^2-(B+Dp^2)^2p^2=0$

$f_1+f_2z^2+f_3z^4+f_4z^6+f_5y^8=0$

として

$(f_1+f_4z^6)+(f_2+f_5z^6)z^2+f_3z^4=0$

$f_1+f_4z^6=A_1$, $f_2+f_5z^6=B_1$, $f_3z^4=C_1$

$A_1+B_1z^2+C_1z^4=0$ とすると

$A_1{}^3+B_1{}^3z^6+C_1{}^3z^{12}-3A_1B_1C_1z^6=0$ だから

これに $z^3=3817-x^3$ を代入すれば z は消去され y の冪に整理する。

$F_1+F_2y^2+F_3y^4+F_4y^6+F_5y^8+F_6y^{10}+F_7y^{12}=0$

$(F_1+F_4y^6+F_7y^{12})+(F_2+F_5y^6)y^2+(F_3+F_6y^6)y^4=0$

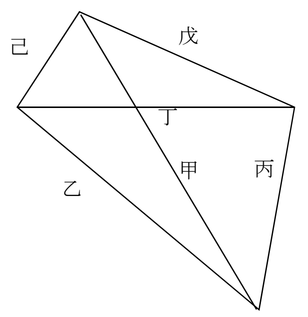
$F_1+F_4y^6+F_7y^{12}=P_1$, $F_2+F_5y^6+F_8v^6=Q_1$, $F_3+F_6y^6=R_1$

$P_1+Q_1y^2+R_1y^4=0$ とすると

$P_1{}^3+Q_1{}^3y^6+R_1{}^3y^{12}-3P_1Q_1R_1y^6=0$ だから

これに $y^3=5572-x^3$ を代入すれば y は消去され x の 72 次方程式が得られる。

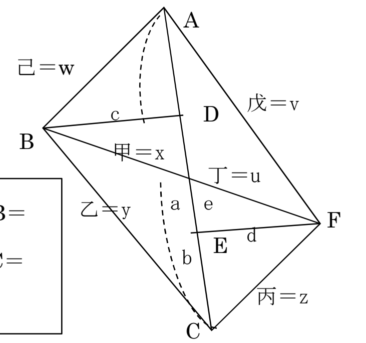
問 14. 甲^3－乙^3＝271　，乙^3－丙^3＝217 坪　，
丙^3－丁^3＝60.8 坪　，丁^3－戊^3＝362.1 坪　，
戊^3－己^3＝61 坪のとき甲、乙、丙、丁、戊はいくらか。
この 5 式は 3 次式である。



問 14. 解図

DC＝a
EC＝b
BD＝c
EF＝d
DE＝e

∠ADB＝
∠EFC＝
∠R



問 14(解法)

甲$=x$,乙$=y$,丙$=z$,丁$=u$,戊$=v$,己$=w$ とおく

$y^3=x^3-271$・・・(1), $y^3=x^3-271$・・・(2), $u^3=z^3-60.6$・・・(3),

$v^3=u^3-326.2$・・(4), $w^3=v^3-61$ ・・・(5)

$x^2+y^2-w^2=2xy\cos\angle BCA=2ax$・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(6)

$x^2+z^2-v^2=2bx$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(7)

(6)の両辺に $4x^2y^2$ を加える

$4x^2y^2-(x^2+y^2-w^2)^2=4x^2y^2-4a^2x^2=4c^2x^2$

$-x^4-y^4+2x^2y^2+2(x^2+y^2)w^2-w^4=4c^2x^2$・・・・・・・・・・・・・・(8)

同様に

$4x^2z^2-(x^2+z^2-v^2)^2=4x^2(z^2-b^2)=4d^2x^2$

$-x^4-z^4+2x^2z^2+2(x^2+z^2)v^2-v^4=4d^2x^2$・・・・・・・・・・・・・・(9)

(6)−(7)

$y^2-z^2+v^2-w^2=2(a-b)x=2ex$

平方して

$y^4+z^4+v^4-2y^2z^2+2y^2v^2-2z^2v^2-(y^2-z^2+v^2)w^2+w^4=4e^2x^2$・・・・・(10)

$4u^2x^2-y^4-z^4-v^4+2y^2z^2-2y^2v^2+2z^2v^2+(y^2-z^2+v^2)w^2-w^4=$

$4x^2(u^2-e^2)=4(c+d)^2x^2$・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(11)

(11)−(8)+(9)を 2 で約して

$A+Bw^2=4cdx^2$ とする。

$A^2+2ABw^2+B^2w^4=16c^2d^2x^4$

(8)×(9)

$C+Dw^2+Ew^4=16c^2d^2x^4$

$(A^2-C)+(2AB-D)w^2+(B^2-E)w^4=0$

$4x^2$ で約して簡単にして

$P+Qw^2+Rw^4=0$ とする。

$P^2+Q^3w^6+R^3w^{12}-3PQRw^6=0$

P,Q,R は x^2,y^2,z^2,u^2,v^2 のみの関数である。これに $w^3=v^3-61$ を代入すればwは消去され、$R^3w^{12}=(v^2)^3\cdot v^{12}$ となり v の 18 次式の方程式となる。

$f_1+f_2v+f_3v^2+f_4v^3+f_5v^4+\cdots\cdots+f_{16}v^{15}+f_{17}v^{16}+f_{18}v^{17}+f_{19}v^{18}=0$

として

$(f_1+f_4v^3+f_7v^6+\cdots+f_{19}v^{18})+(f_2+f_5v^3+f_8v^6+\cdots+f_{18}v^{16})v+(f_3+f_6v^3$

$+f_9v^6+\cdots+f_{17}v^{14})v^2=0$

$f_1+f_4v^3+f_7v^6+\cdots=A_1$, $f_2+f_5v^3+f_8v^6+\cdots=B_1$, $f_3+f_6v^3+f_9v^6\cdots$

$=C_1$

$A_1+B_1v+C_1v^2=0$ とすると

${A_1}^3+{B_1}^3v^3+{C_1}^3v^6-3A_1B_1C_1v^3=0$ だから$-3A_1B_1C_1v^3=-3v^{18}v^{17}v^{16}v^3$ だから

これに $v^3=u^3-326.2$ を代入すればvはuについての 54 次方程式をえる。

同様にして u を消去すれば 162 次方程式 z を消去すれば 486 次方程式,y を消去すればxの 1458 次方程式になる。

六斜術は 6 次式である。未知数を 1 つ消すたびに

6,18,54,162,486,1458 と最後は 1458 次方程式となる。

問 15. 今有銀 7 貫目、灰吹 5 貫目、借りた年数わからず、銀 29 貫目、灰吹 28 貫目あり、只云う銀の年利足より、灰吹の年利足が高い、百目につき、四匁目当てある。銀、灰吹の年利足何割、並びに借りる年数は何年か問う。

問 15(解法)

n 年目とすると

$7(1+r)^n=29$,　$5\left(1+\frac{4}{100}+r\right)^n=28$,

$1+r=\sqrt[n]{4.142857\cdots}$　,$1+0.4+r=\sqrt[n]{5.6}$

に適する近似値を得ている。