米光　丁

招差法

招差法とは関数 $y=f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots+a_nx^n$ の変数 x の値、x_1, x_2, x_3, ・・・・・・, x_n,(限数と呼んでいる)に対する y の値 y_1, y_2, y_3, ・・・・・・, y_n(元積と呼んでいる)が与えられたとき、この関数の係数 a_1(定差), a_2(平差), a_3(立差), a_4(三乗差), a_5(四乗差), ・・・・・, a_n が決定する この差を求めるのが差を招くと云う所から招差法といい、定数項がないところから $\dfrac{y_n}{x_n}$ を定積と呼ぶ。隣通しの限数の差 x_2-x_1, x_3-x_2, x_4-x_3, ・・・を平積法という。隣通しの定積の差を平積実と名付ける。わかりにくいのでわかりやすく一次相乗の差から説明しよう。

限数がすなわち x=5, 7, 16, 20 のとき元積 y=15, 28, 136, 210 のとき関数を決定せよという問題である。

限数	元積	定積	平積
x_n	y_n	$\dfrac{y_n}{x_n}=z_n$	$\dfrac{z_{n+1}-z_n}{x_{n+1}-x_n}$
5	15	$\dfrac{15}{5}=3$	$\dfrac{4-3}{7-5}=0.5$
7	28	$\dfrac{28}{7}=4$	$\dfrac{8.5-4}{16-7}=0.5$
16	136	$\dfrac{136}{16}=8.5$	$\dfrac{10.5-8.5}{20-16}=0.5$
20	210	$\dfrac{210}{20}=10.5$	

$y=a_1x+a_2x^2$, $z=\dfrac{y}{x}=a_1+a_2x$, $z_1=\dfrac{y_1}{x_1}=a_1+a_2x_1$, $z_2=\dfrac{y_2}{x_2}=a_1+a_2x_1$

$a_2=\dfrac{z_2-z_1}{x_2-x_1}$, $a_1=z_1-a_2x_1$

(現代的解説)

$f(x)=a_1x+a_2x^2$

$$\begin{cases} 15=5a_1+25a_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 28=7a_1+49a_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

約分して(1)÷3=z_1(定積) , (2)÷7=z_2(定積)

$$\begin{cases} 3=a_1+5a_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 4=a_1+7a_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(2)-(1)　(平積)としていることがわかる。

$a_2=0.5$　$a_1=0.5$ が得られ $f(x)=0.5x+0.5x^2$ を示したことになる。

二次相乗の法

これも一次相乗の法と同じで

例題より説明する。

$y_n=a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ とする。

$x_1=3$(限数)のとき $y_1=14$(元積)

$x_2=8$(限数)のとき $y_2=204$(元積)

$x_3=11$(限数)のとき $y_3=506$(元積)

とあり(現代解説)

$$\begin{cases} 14=3a_1+9a_2+27a_3 \cdots\cdots (4) \\ 204=8a_1+64a_2+512a_3 \cdots\cdots (5) \\ 506=11a_1+121a_2+1331a_3 \cdots (6) \end{cases}$$

(4)÷3, (5)÷8, (6)÷11 とすると

$$\begin{cases} \dfrac{14}{3}=a_1+3a_2+9a_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4) \\ \dfrac{204}{8}=a_1+8a_2+64a_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5) \\ \dfrac{506}{8}=a_1+11a_2+121a_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6) \end{cases}$$

(5)-(4), (6)-(5) (平積)

$$\begin{cases} \dfrac{25}{6}=a_2+11a_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7) \\ \dfrac{41}{6}=a_2+19a_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8) \end{cases}$$

(8)－(7)(立差)

$a_3=\dfrac{1}{3}$ ，$a_2=\dfrac{1}{2}$ ，$a_1=\dfrac{1}{6}$ を求め

元積　$y=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3=\dfrac{1}{6}(x+3x^2+2x^3)$ として 2 を立差,3 を平差,1 を定差, $\dfrac{1}{6}$を約法と呼んでいる。このように連立方程式を今日の解法のように解けばよいことがわかる。これが和算では方程招差法である。連立方程式は単に方程式と呼んでいた。このように言葉ですべてを表現しないと現代のような表現はできなかった。

垜積術解

自然数和、自然数の平方・立方和等の式を導くために、$(a+b)^n$ の展開式の係数からできないかと考えたものと思われる。すなわち(註:昔は現代の次数より１少なく表している)

問題として $1+2+3=6$, $1^2+2^2+3^2=14$, $1^3+2^3+3^3=36$, $1^4+2^4+3^4=98$, $1^5+2^5+3^5=276$, $1^6+2^6+3^6=794$, $1^7+2^7+3^7=2316$, $1^8+2^8+3^8=6818$, $1^9+2^9+3^9=20196$, $1^{10}+2^{10}+3^{10}=60074$, $1^{11}+2^{11}+3^{11}=179196$ を掲載している。

(底　子)	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots\cdots\cdots$ n
(圭　垛)	1	3	6	10	15	21	28	$\cdots\cdots\cdots \dfrac{n(n+1)}{2}$
(三角衰垛)	1	4	10	20	35	56	84	$\cdots\cdots\cdots \dfrac{(n+2)(n+1)n}{2\cdot 3}$

(圭 垛 積)　$1+2+3+4+\cdots\cdots\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}(n^2+n)$

(平方垛積)　$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2\cdot 3}=\dfrac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$

(立方垛積)　$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}=\dfrac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)$

(三乗垛積)　$1^4+2^4+3^4+4^4+\cdots+n^4=\dfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

$=\dfrac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n)$・・・等の公式を導く方法を次のように考えた。

$$\begin{array}{lccccccl}
\text{平方垛積} & 1^2 & +2^2 & +3^2 & +4^2 & +5^2 & +6^2 & +\cdots\cdots+n^2 \\
 & 1 & 5 & 14 & 30 & 55 & 91 & \cdots\cdots\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2\cdot 3} \\
 & 1 & +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & \cdots\cdots+n \\
-)\ \underline{\text{圭　垛}} & \underline{1} & \underline{3} & \underline{6} & \underline{10} & \underline{15} & \underline{21} & \underline{\cdots\cdots\cdots}\dfrac{n(n+1)}{2} \\
 & 0 & 2\cdot 1 & 2\cdot 4 & 2\cdot 10 & 2\cdot 20 & 2\cdot 35 & \cdots\cdots 2\cdot\dfrac{(n+1)n(n-1)}{2\cdot 3}
\end{array}$$

$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2-\dfrac{n(n+1)}{2}=2\times\dfrac{(n+1)n(n-1)}{2\cdot 3}$

$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=2\times\dfrac{(n+1)n(n-1)}{2\cdot 3}+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2\cdot 3}$

と考えた。この方法で $1^r+2^r+3^r+4^r+\cdots+n^r$ を導いたものと考えられ更に、次のような平方和を求めるのに次に示す$(1+1)^n$ の展開式の係数との関係を考えた。これは現在パスカルの三角係数等といわれているが、中国の朱世傑著『四元玉鑑』1303 年には掲載されており、日本でも早くから使われていたようである。

1 基　　1　1
2 圭　　1　2　1
3 平方　　1　3　3　1
4 立法　　1　4　6　4　1
5 三乗　　1　5　10　10　5　1
6 四乗　　1　6　15　20　15　6　1
7 五乗　　1　7　21　35　35　21　7　1
8 六乗　　1　8　28　56　70　56　28　8　1
9 七乗　　1　9　36　84　126　126　84　36　9　1
10 八乗　　1　10　45　120　210　252　210　120　45　10　1
11 九乗　　1　11　55　165　330　462　462　330　165　55　11　1
12 十乗　　1　12　66　220　495　792　924　792　495　220　66　12　1

後の方を０にして

1 基数１　0　　⇨　　和の係数

原法　2 圭　1　2　0　　$\frac{1}{2}$（1　1　0 ）

原法　3 平方 1　3　3　0　　$\frac{1}{3}$ {1　$\frac{3}{2}$　$\frac{1}{2}$ ($\frac{3}{6}$)　0 }

原法　4 立法 1　4　6　4　0　　$\frac{1}{4}$ {1　2($\frac{4}{2}$)　1 ($\frac{6}{6}$)　0　0}

原法　5 三乗 1　5　10　10　5　0　　$\frac{1}{5}$ {1　$\frac{5}{2}$　$\frac{5}{3}$ ($\frac{10}{6}$)　0　$-\frac{1}{6}$ ($\frac{10}{30}$)　0}

原法　6 四乗 1　6　15　20　15　6　0　　$\frac{1}{6}$ {1　3($\frac{6}{2}$)　$\frac{5}{2}$ ($\frac{15}{6}$)　0　$-\frac{1}{2}$ ($\frac{15}{30}$)　0　0 }

原法　7 五乗 1　7　21　35　35　21　7　0　　$\frac{1}{7}$ {1　$\frac{7}{2}$　$\frac{7}{2}$ ($\frac{21}{6}$)　0　$-\frac{7}{6}$ ($\frac{35}{30}$)　0　$\frac{1}{6}$

↑　↑　↑　↑　↑

$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{6}$　0　$-\frac{1}{30}$　0・・・関・ベルヌイ数を掛ける

原法　n　1　n　${}_nC_2$　${}_nC_3$　・・・・・・・・・・・・・・・・　${}_nC_n$

和の係数　n　1　$n\times\frac{1}{2}$　${}_nC_2\times\frac{1}{6}$　${}_nC_3\times 0$　${}_nC_4\times(-\frac{1}{30})$　${}_nC_5\times 0$　${}_nC_6\times$

$\frac{1}{42}$　・・・・・・・　${}_nC_n$　⇨

$\frac{1}{n}$（1 ＋ $n\times\frac{1}{2}$ ＋ ${}_nC_2\times\frac{1}{6}$ ＋ ${}_nC_3\times 0$ ＋ ${}_nC_4\times(-\frac{1}{30})$＋ ${}_nC_5\times 0$ ＋ ${}_nC_6\times$

$\frac{1}{42}$ ・・・・・）とすると和の式の係数が得られる。

圭垜　$\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+4+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

平方垜　$\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}(n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n)$

立方垜　$\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)$

三乗方垜　$\sum_{k=1}^{n} k^4=1^4+2^4+3^4+4^4+\cdots+n^4=\frac{1}{5}(n^5+\frac{5}{2}n^4+\frac{5}{3}n^3-\frac{1}{6}n)$

衰垜又は衰垜積

問題　圭垜１＋２＋３＝6，三角衰垜１＋３＋６＝10，再乗衰垜１＋４＋10＝15，三乗衰垜１＋５＋15＝21，四乗衰垜１＋６＋21＝28，五乗衰垜１＋７＋28＝36，を掲載している。

圭垜（自然数）　１，２，３，４，５，６，・・・・・・・・・・・・・・，n

三角衰垜　１，3，6，・・・・・・・・・・・・・・・・・・・，$\frac{n(n+1)}{2}$

再乗衰垜　１，４，10，20，・・・・・・・・・・・・・・，$\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}$

三乗衰垜　1, 5, 15, 35, ・・・・・・・・・・, $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2\cdot 3\cdot 4}$

四乗衰垜　1, 6, 21, 56, ・・・・・・・・, $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

圭垜積 $1+2+3+4+\cdots+n=\frac{1}{2}(n+n^2)$

三角衰垜積 $1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}$

再乗衰垜積 $1+4+10+20+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2\cdot 3\cdot 4}$

三乗衰垜積 $1+5+15+35+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2\cdot 3\cdot 4}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$

四乗衰垜積 $1+6+21+56+\cdots$

$+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

（参考）

階差数列では中国の朱世傑が 1303 年『四元玉鑑』を著した中に招差法が記載されているものをここで示すことにする。

$$\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+4+\cdots+n=\frac{1}{2!}\,n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2!}\,k(k+1)=1+3+6+\cdots=\frac{1}{3!}\,n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3!}\,k(k+1)(k+2)=1+4+10+\cdots=\frac{1}{4!}\,n(n+1)(n+2)(n+3)$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)\cdots(k+p-1)=\frac{1}{p+1}n(n+1)\cdots(n+p)\\ \text{又は}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)}{r!}=\\ \displaystyle\frac{n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}{(r+1)!}\end{array}}$$

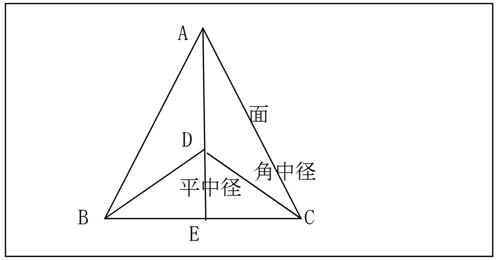
例えば $\sum_{k=1}^{n} k^2=\sum_{k=1}^{n} k(k+1)-\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

$-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)2n+1)$

簡単に求められる。ただし $\sum_{k=1}^{n} k^2=\sum_{k=1}^{n} k(k-1)+\sum_{k=1}^{n} k$

としてもよい。

角法演段これは角法演段三角至二十角よりなる。



今三角面(正三角形の一辺)１寸のとき
平中径、角中径、面積はいくらか。
答　平中径 DE＝0.288675134 強半寸
　　角中径 DC＝0.577350269 少弱寸
　　面積 0.433013701 太強寸
(解説)正三角形だから

平中径 DE は重心から底辺までの距離だから $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}=0.288675134$ 寸

角中径 DC は重心から底辺の端までの距離だから $\frac{1}{2}\sqrt{(1+\frac{1}{3})}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

＝0.577350269 寸

面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}=0.433012701$

今内接円の半径を r、外接円の半径を R とすれば

面積は $\frac{3}{2}r=\frac{\sqrt{3}}{4}$　　$12r=2\sqrt{3}$ より $36r^2=3$　$1-12r^2=0$　　$r=0.288675134$

$\frac{1}{\sin A}=2R$　より $R=\frac{1}{\sqrt{3}}$　　$1-3R^2=0$　　$R=0.577350269$

『括要算法』第２巻亨関孝和(1642?～1708)は
諸約之法　互約術　逐約術　斉約術　遍約術
増約術　損約術　零約術　遍通術　剰一術　翦管術
よりなる。
互約
これは最小公倍数を変えないで２数を素に
することである。
今６と８が有り、互約すれば何ほどか。
　　　　　　答え曰く６に３を為す。
８約されず
術に曰く６と８互いに減じ、等数
２を得る。２を以って６を約す３を為す、３と８を
互いに減じ等数１を得る。１は即ち約されずこれで
止めるる。
○又術に曰く、８と６を互いに減じ
等数２をもって８を約す４と為す。
４と６を互いに減じ等数２を以って
４と掛け８と為す。６は３と為す。
（解説）
６,８のユクリッド互除法と同じ方法
で GCM は２としている。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 6\ ,\ 8 \\ \hline & 3\quad 4 \end{array}$$

３で８は割り切れないとしている。また３と８の最大公約数１であるから
ここまでで止める。
(参考)

$$\begin{array}{r|l} 2 & 6\ ,\ 8 \\ \hline & 3\quad 4 \end{array}$$

最小公倍数は24だから２数を素にするには３と８ある。
後の問題に36,48 と 30, 54 の問題を載せている。

12)36　48
　3　4　　だから最小公倍数は 144 であるから
12 を 3 と 4 に分解して $144=3^2\times4^2$ となり 9 と 16 になる。

6)30　54
　5　9　　だから最小公倍数は 270 であるから
6 を 2 と 3 に分解して $270=2\times3^3\times5$ となり
5 と 54 又は 10 と 27 になる。

1. 逐約（ちくやく）

これは 3 つ以上の互約を求めることである。
105 と 112 と 126 があり、この逐約はいくらか。
答え曰く
105 は 5 を為す。
112 は 16 を為す
126 は 63 を為す。（解説）
105　112　　（等数 7）15　　126（等数 3）
112　　126（等数 14）
16　　63（等数 14＝7×2 だから
112÷7＝16，　126÷2＝63 とする。）
故に 5，16，63 が約数である。35，16，9 または
5,112,9 としてもよい。
等数は最大公約数のことである。
（現代的解法）
7)105，112，126
3) 15　16　18
2)　5　16　6
5　8　3
最小公倍数の計算 7×3×2×5×8×3＝5×16×63
＝35×16×9＝5×112×9＝5040 と同じである。

このほか 105，112，126，168 および
105，112，126，168，204 の逐約問題がある。
7)105，112，126　168
3) 15　16　18　24
8)　5　16　6　8
2)　5　2　6　1
　5　1　3　1
最小公倍数の計算 7×3×8×2×5×3＝5×16×9×7
＝5040
7)105，112，126　168　204
3) 15　16　18　24　204
2)　5　16　6　8　68
4)　5　8　3　4　34
2)　5　2　3　1　34
　5　1　3　1　17
最小公倍数の計算 7×3×8×2×5×3×17
＝5×16×9×7×17
＝85680
したがって 5,16,9,7,17 となる。

2. 齊約

今 6 と 8 の齊約は幾何か
答え曰く 24
術に曰く 6 と 8 を互いに減じ等数 2 を得る。
6 を約し 3 を得る。3 と 8 を掛けて 24 を得る。
（現代解釈）
齊約は最小公倍数を求めることである。
2) 6，8
今は 8 の下に 4 を書いて
3×4＝24 とするが和算家は 3×8 としている。
このほか 6，8，9 および 6,14，15，25 の齊約問題を載せている。

3. 遍約
8 と 10 の遍約はいくらか。
答え曰く　8 を 4 と為す、10 を 5 と為す
術曰く 8 と 10 を互いに減じ等数 2 を得る。
2 を以って 8 を約す 4 と為す。10 を 5 と為す。
(現代的解法)
遍約は最大公約数を取り除き簡単にすることである。
このほかに 12,30,39 と
48,72,108128 の問題を載せている。

4. 増約　　増数 1 以上は既に極数なし
今原 10 あり 0.6 ずつ増していくと極数はいくらか。
答え曰く 極数 25
術曰く　1 を置き 0.6 減らす余り 0.4 を
法として原 10 を以って實と為す。
實を法の如く 1 にて極数をえる。
(現代的解説)

$$10\left(\frac{1}{1-0.6}\right)=25$$

原数を a(初項), 増数を r(公比)、極数 S(和)とする。
無限等比数列である。
即ち

$$S=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdot\cdot+ar^n$$

周知のとおり

$S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$であり、無限のときは$S=a-\dfrac{ar}{1-r}$

である。

※術文で「實を法の如く而も一にして」は
中国伝来の言葉で實を法で割ることである。

5. 損約　損数 $r\geqq\dfrac{1}{2}$のときは極数なし

今 12 があり 0.4 損する極数はいくらか。
答え曰く　極数 4
術曰く 1 を置いて 0.4 を減ず 0.6 余り
法と為す。0.4 を置きこれを倍して
0.8 を 1 より減らし 0.2 あまる原 12
を掛けて 2.4 が實を為す。實を法
で割ると極数を得る。
(現代的解釈)
原数 a(初項), 損数 r(公比)、極数 S(和)とすると

$$S=a-ar-ar^2-ar^3-ar^4-\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot-ar^n\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(1)$$

$$rS=ar-ar^2-ar^3-ar^4-\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot-ar^n-ar^{n-1}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(2)$$

(1)－(2)

$$S=\frac{a-2ar+ar^{n-1}}{1-r}$$

$$S=\frac{a(1-r)-ar+ar^{n-1}}{1-r}$$

$S=a-\dfrac{ar}{1-r}$(n が無限大の時ょ

となりここでは

$S=12-\dfrac{12\times0.4}{1-0.4}=12-8=4$ となる。

6. 零約

今方 1 尺斜 1 尺 4 寸 1421 強がある。
零約の内外親疎方斜率各いくらか。
答え曰く

内疎	方率 5	斜率 7
外疎	方率 7	斜率 10
内親	方率 29	斜率 41
外親	方率 41	斜率 58

（現代的解釈）

零約は不尽数(無限小数)を分数で
表そうとするものである。
分母を方率、分子を斜率という。

$\frac{1}{1}$(少)，$\frac{3}{2}$(多)，$\frac{4}{3}$(少)，$\frac{6}{4}$(多)，$\frac{7}{5}$(少)，

最初に分子、分母を 1 として 1. 4142
1. 4142 より少ないときは分子に
分母に 1 多い時は分母子に 1 を加え
ていく。
内疎とは少にして疎なる率。

$\frac{7}{5}$ ＝1. 4(少＝内疎)

$\frac{10}{7}$ ＝1. 42857(多＝外疎)

$\frac{41}{29}$ ＝1. 41379(少＝内親)

$\frac{58}{41}$ ＝1. 414634(多＝外親)

今$\frac{5}{6}$と$\frac{3}{8}$の遍通は各いくらか
答曰く
$\frac{5}{6}$は$\frac{20}{24}$ と為す。$\frac{3}{8}$は$\frac{9}{24}$ と為す
術曰く
分母 6 と 8 を齊約術によって 24
を為す。各分子之を掛けて各分母子の約を得る。
(現代解釈)
遍通は通分することである。
零約術とは小数を分数に直す方法
※零約術の求め方
A＝3. 141592 の場合

$3.141592 = 3(a_1) + 0.141592$

$\frac{1}{0.141592} = 7(a_2) + 0.062545906$

$\frac{1}{0.062545906} = 15(a_3) + 0.98825668$

$\frac{1}{0.98825668} = 1(a_4) + 0.011882864$

$\frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1} = 3 < A$ ， $\frac{p_1 \cdot a_2 + 1}{q_1 \cdot a_2} = \frac{3 \cdot 7 + 1}{1 \cdot 7} = \frac{22}{7} = \frac{p_2}{q_2} = 3.142857142 > A$

$\frac{p_2 \cdot a_3 + p_1}{q_2 \cdot a_3 + q_1} = \frac{22 \cdot 15 + 3}{7 \cdot 15 + 1} = \frac{333}{106} = \frac{p_3}{q_3} = 3.141509433 < A$

$\frac{p_3 \cdot a_4 + p_2}{q_3 \cdot a_4 + q_2} = \frac{333 \cdot 1 + 22}{106 \cdot 1 + 7} = \frac{355}{113} = \frac{p_4}{q_4} = 3.14159292 > A$

したがって 3. 141592＝$\frac{355}{113}$ となる。

1. 二次方程式和算家の解法

※ax^2+bx+c を $X^2+bX+ac$ として考える。

$6x^2+x-1$ を $X^2+X-6=(X+2)(X-3)$ として

$$6x^2+x-1=6\left(x+\frac{2}{6}\right)\left(x-\frac{3}{6}\right)=6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=(2x+1)(3x-1)$$ とした。

方程式もこれを利用して解ける。

※二次方程式 $2x^2-3x-20=0$ を解くには $(2x+5)(x-4)=0$ として

$x=4$ ，$x=-\dfrac{5}{2}$ とするが

$x^2=y$ とおいて

$3x-2y=-1$ $x=1$ ，$y=2$（特に求める必要はない）

$3x-2y=-20$ になるようにした。

$3\times(20-2n)-2(2\times20-3n)=-20$

$x=20-2n$ ，$y=40-3n$

$x>0$ ，$y>0$ と置くと $20-2n>0$ より n の最も大きい自然数は 9

$40-3n>0$ より n の最も大きい自然数は 13

従って $n<9$ ，$n<13$ より 整数 $n<9$

$n=8$ のときは $x=4$，$y=16$

$$\begin{array}{r|rrr} 4) & 2 & -3 & -20 \\ & & 8 & 20 \\ \hline & 2 & 5 & \end{array}$$

$2x+5=0$ $x=-\dfrac{5}{2}$

算盤で解く方法

4	商
−20	実
20	
5	
−3	法
8	
2	廉

剰一術について

たとえば

例１．$7x-5y=1$ を解く場合

$$\begin{array}{r} 1 \\ 5\overline{)7} \\ \underline{5}\ \ 2 \\ 2\overline{)5} \\ \underline{4} \\ 1 \end{array}$$

すなわち $1=5-2\times2$

$=5-(7-5\times1)\times2$

$=-7\times2+5\times3$ $x=2$ ，$y=-3$ となるので

$1=5-2\times2$

$=5-2(7-5)$

$=5\times4-7\times3$ $x=3$ ，$y=4$ とする。

または連分数で解く方法

$7x-5y=1$ より $\dfrac{7}{5}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{5x}$ と考えて

$\dfrac{7}{5}=1+\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{2}}$ とする。$\dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{4}{3}$ すなわち $x=3$ ，$y=4$ となる。

例２ $2700x-91y=1$ を解く場合。

$$\begin{array}{r} \boxed{29} \\ \boxed{91}\overline{)2700} \\ \underline{182} \\ 880 \\ \underline{819}\ \ \ 1 \\ \boxed{61}\overline{)91} \\ \underline{61}\ \ \ 2 \\ \boxed{30}\overline{)61} \\ \underline{61} \\ 0 \end{array}$$

$1=61-\boxed{30}\times2=61-(91-\boxed{61}\times1)\times2$

$=61+61\times2-91\times2$

$=61(1+2)-91\times2$

$=(2700-\boxed{91}\times\boxed{29})\times3-91\times2$

$=2700\times3-91\times29\times3-91\times2$

$=2700\times3-91(29\times3+2)$

$=2700\times3-91\times89$

$x=3$ ，$y=89$

となる。

例3. 19x－27y＝1 を解く場合

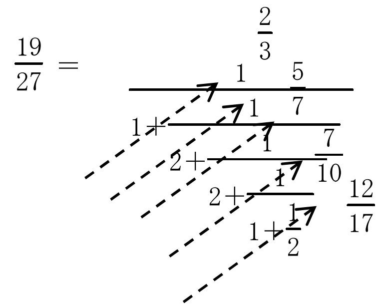
$$\begin{array}{r} \underline{\quad 1 \quad} \\ 19)\,27 \quad\quad \\ \underline{19 \quad\ 8} \\ 8)\,19 \quad\quad \\ \underline{16 \quad\ 3} \\ 3)\ \underline{8 \quad\ 2} \\ 2)\ 3 \quad\ 1 \end{array}$$

27 を 19 で割ると商が 1(a_1とする)で余りが 8 である。
19 を 8 で割ると商が 2(a_2とする)で余りが 3 である。
8 を 3 で割ると商が 2(a_3とする)で余りが 2 である。
3 を 2 で割ると商が 1(a_4とする)で余りが 1 である。
余りが 1 であるから、この計算は終わり、$b_0=0$, $b_1=1$
とする。
27÷19＝1(a_1とする)　余り 8・・・・・・・・・・・・・・・・(甲)
19÷8＝2(a_2とする)　余り 3 ・・・・・・・・・・・・・・・・(乙)
8÷3＝2(a_3とする)　余り 2・・・・・・・・・・・・・・・・・(丙)
3÷2＝1(a_4とする)　余り 1・・・・・・・・・・・・・・・・・(丁)

(甲商)×(乙商)＋1＝3 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・(子)
(子)×(丙商)＋(甲商)＝7・・・・・・・・・・・・・・・・・(丑)
(丑)×(丁商)＋(子)＝10・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(x)

$b_2=b_0+b_1 a_1=1$
$b_3=b_1+b_2 a_2=3$
$b_4=b_2+b_3 a_3=7$
$b_5=b_3+b_4 a_4=10$
$x=b_5=10$
19x は 190 である。

『括要算法』の解法はほとんどの解説書で術によって次のようにしている。
19x－27y＝1 の 19x を左、27y を右として 19x を左として求めている。
x, y を求める術は　　左　　右
　　　　　　　　　　19　　27
乙商・・・2　　－)16　－)19　　1・・・・・甲商
　　　　　余り乙 3　　8　余り甲
丁商・・・1　　－)2　　－)6　　2・・・・・丙商
余り丁 1　　2　余り丙（左の余りが 1 で止める）
子＝甲商(1)×乙商(2)＋1＝3
丑＝子(3)×丙商(2)＋甲商(1)＝7(右段数 y)
丁商(1)×丑(7)＋子(3)＝10(左段数 x)
として x=10、y=7 を求めている。
これは連分数で考えるとわかりやすい。
甲商(a_1)、乙商(a_2)、丙商(a_3)、丁商(a_4)とおくと



$$\begin{array}{l} \underline{1(a_1)} \\ 19)\,\underline{27 \qquad\quad} \\ \underline{\ 19 \quad 2(a_2)} \\ 8)\ 19 \\ \quad 16\ \underline{\ 2(a_3)} \\ \qquad\quad 3)\ 8 \\ \qquad\qquad \underline{6\ \ 1(a_4)} \\ (a_5)\quad 2)\ 3 \\ \qquad\qquad \underline{\ 2\ } \\ \qquad\qquad\ 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{19}{27}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}$$

甲商(a_1)→
乙商(a_2)→
丙商(a_3)→
丁商(a_4)→

(a_2)までの計算　　　(a_3)までの計算　　　(a_4)までの計算

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\ ,\qquad \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{5}{7}\ ,\qquad \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+1}}}=\frac{7}{10}\ ,$$

(a_5)までの計算　$\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=\frac{12}{17}$ ，　ただし $a_5=2-1=1$ とする。

※$19x-27y=1$ を解く場合は$\frac{7}{10}$ まで、※$19x-27y=-1$ を解く場合は$\frac{12}{17}$

まで

計算すればよいことがわかる。

たとえば

例１．$7x-5y=1$ を解く場合

```
   1
5)7
   5  2
   2 )5
      4
      1
```

$7x-5y=1$ より$\frac{7}{5}-\frac{y}{x}=\frac{1}{5x}$ と考えて

$\frac{7}{5}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$ だから　$\frac{y}{x}=1+\frac{1}{2+1}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$ すなわち $x=3$ ，

$y=4$ となる。

$5x-7y=1$ の場合は$\frac{x}{y}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ すなわち $x=3$ ，　$y=2$ となる

どちらかに大きい数が有る場合は余りを求めて、同様にする。但し一方の解のみが正しいので後は代入する。

179x－74y＝1 の 179x を左、74y を右として 179x を左として求めている。

(左の数が多い場合は左を１段あける)

x, y を求める術は　　　左　　　右

```
                     179        74
                  ─)148      ─)62          2・・・・・甲商
 31          12     余り甲
乙商・・・2          ─)24       ─)7          1・・・・・丙商
余り乙 7          5  余り丙
丁商・・・1          ─)5        ─)7          2・・・・・戊商
余り丁 2          2  余り戊
己商・・・1          ─)5        ─)7          2・・・・・戊商
余り丁 2          2  余り戊
                      1
                      1
```

(左の余りを１で止める)

子＝甲商(2)×乙商(2)＋1＝5

丑＝子(5)×丙商(1)＋甲商(2)＝7

寅＝丁商(1)×丑(7)＋子(5)＝12

卯＝戊商(2)×寅(12)＋丑(7)＝31

辰＝己商(1)×卯(31)＋寅(12)＝43・・(左段数 x)

179×43＝7697(総数)

として x＝43、y＝104 を求めている。

翦管術

> 問1.今総数はわからない。5で割ると1余り、7で割ると2余る数はいくらか。

答　総数16

術　(5の余り1に21を掛けた数21)＋(7の余り2に15を掛けた数30)＝51　　51－5×7＝16(総数)

総数をxとすると

x≡1(mod5)　,x≡2(mod7)　3,5は互いに素だから

x_1≡1(mod5)　,x_1≡0(mod7)より x_1＝21

x_2≡0(mod5)　,x_2≡1(mod7)より x_2＝15

x≡1×21＋15×2(mod5×7)　,x≡16(mod35)

剰一術　7x－5y＝1

左　右
7　5
乙商 1　5　4　甲商2
2　1
1　甲商・乙商＋1＝子3
1　3×7＝21

5x－7y＝1

左　右
5　7
乙商2　4　5 甲商1
1　2
甲商・乙商＋1＝子3
3×5＝15

> 問2.今総数はわからない。36で割ると2余り、48で割ると14余る数はいくらか。

答　総数110

術　(36の余り2に64を掛けた数128)＋(48の余り14に81を掛けた数1134)＝1262　　1262－12×12×8＝110(総数)

総数をxとすると36と48は素でないから9,16

x≡2(mod36)　,x≡14(mod48)　9,16は互いに素だから

x_1≡1(mod9)　,x_1≡0(mod16)より x_1＝64

x_2≡0(mod9)　,x_2≡1(mod16)より x_2＝81

x≡2×64＋81×14(mod9×16)　,x≡110(mod144)

剰一術

36x－48y＝1 ⇒ 9x－16y＝1

12)36　48

3　4　　$\frac{12\times3}{4}$＝9，$\frac{12\times4}{3}$＝16 と考える

9x－16y＝1
16÷9＝1(甲商)余り7右
9÷7＝1(乙商)余り2左
7÷2＝3(丙商)余り1右
2÷1＝1(丁商)余り1左
甲商・乙商＋1＝子2
子丙商＋甲商＝7丑
丑丁商＋子＝9
x＝9,　y＝5
9x＝81

16x－9y＝1
16÷9＝1余り7左
9÷7＝1(甲商)余り2右
7÷2＝3(乙商)余り1左
甲商・乙商＋1＝子4
x＝4，　y＝7
16x＝64

> 問3.今総数はわからない。3で割ると2余り、5で割ると1余る、7で割ると5余り数はいくらか。

答　総数26

術　(3の余り2に70を掛けた数140)＋(5の余り1に15を掛けた数15)＋(7の余り5に15を掛けた数75)＝236　　236－3×5×7×2＝26(総数)

総数をxとすると3,5と7は素であるから

x≡2(mod3)　,x≡1(mod5)　,x≡5(mod7)　3,5,7は互いに素だから

x_1≡1(mod3)　,x_1≡0(mod5)　,x_1≡0(mod7)より x_1＝70

x_2≡0(mod3)　,x_2≡1(mod5)　,x_2≡0(mod7)より x_2＝21

x_3≡0(mod3)　,x_3≡0(mod5)　,x_3≡1(mod7)より x_3＝15

x≡2×70＋1×21＋15×5(mod3×5×7)　,x≡26(mod105)

> 問4.今総数はわからない。6で割ると3余り、8で割ると3余る、10で割ると5余り数はいくらか。

答　総数75

術　(6の余り3に40を掛けた数120)＋(8の余り3に105を掛けた数315)＋(10の余り5に96を掛けた数480)＝915　　915－3×8×5×7＝75(総数)

2)6 ,8, 10

　3, 4, 5　　6,8,10の最小公倍数2×3×4×5＝120と同じ値で素の三数と3×8×5＝120を考える

総数をxとすると3,8と10は素でないから

$x\equiv 3 \pmod{3}$　, $x\equiv 3 \pmod{8}$, $x\equiv 5 \pmod{5}$　3,8,5は互いに素だから

$x_1\equiv 1 \pmod{3}$　, $x_1\equiv 0 \pmod{8}$, $x_1\equiv 0 \pmod{5}$ より $x_1=40$

$x_2\equiv 0 \pmod{3}$　, $x_2\equiv 1 \pmod{8}$, $x_2\equiv 0 \pmod{5}$ より $x_2=105$

$x_3\equiv 0 \pmod{3}$　, $x_3\equiv 0 \pmod{8}$, $x_3\equiv 1 \pmod{5}$ より $x_3=96$

$x\equiv 3\times 40+3\times 105+5\times 96 \pmod{3\times 8\times 5}$　, $x\equiv 75 \pmod{120}$

問5.今総数はわからない。只云う35を掛けて42で割ると35余り、44を掛けて32で割ると28余る、45を掛けて50で割ると35余り数はいくらか。

答　総数13

術　(42の余り7で割りに5に80を掛けた数400)＋(32の余りを4で割り余り7に75を掛けた数525)＋(50の余りを5で割り7に24を掛けた数168)＝1093　　1093－3×8×5×9＝13(総数)

2)6 ,8, 10

　3, 4, 5　　問4と同じで6, 8,10の最小公倍数2×3×4×5＝120と同じ値で素の三数と3×8×5＝120を考える

総数をxとすると3,8と10は素ないから

$35x\equiv 35 \pmod{42}$　, $44x\equiv 28 \pmod{32}$, $45x\equiv 35 \pmod{50}$　だから

$5x\equiv 5 \pmod{6}$　, $11x\equiv 7 \pmod{8}$, $9x\equiv 7 \pmod{10}$

2)6 , 8 ,10

　3 , 4, 5　　3, 8, 5

$5x\equiv 5 \pmod{3}$　, $11x\equiv 7 \pmod{8}$, $9x\equiv 7 \pmod{5}$ を解くには

$a_1x\equiv b_1 \pmod{c_1}$, $a_2x\equiv b_2 \pmod{c_2}$, $a_3x\equiv b_3 \pmod{c_3}$,として

a_1, c_1, a_2, c_2, a_3, c_3, の剰一術を作り、y_1, y_2 y_3, を求める。

$a_1\times y_1-c_1\times z_1=1$　, $a_2\times y_2-c_2\times z_2=1$, $a_3\times y_3-c_3\times z_3=1$

$5y_1-3\times z_1=1$　, $11y_2-8\times z_2=1$　, $9y_3-5\times z_3=1$　,

$y_1=2$　, $y_2=3$　, $y_3=4$　, $z_1=3$　, $z_2=4$　, $z_3=7$

$x_1\equiv 1 \pmod{3}$　, $x_1\equiv 0 \pmod{8}$, $x_1\equiv 0 \pmod{5}$ より $x_1=40$

$x_2\equiv 0 \pmod{3}$　, $x_2\equiv 1 \pmod{8}$, $x_2\equiv 0 \pmod{5}$ より $x_2=105$

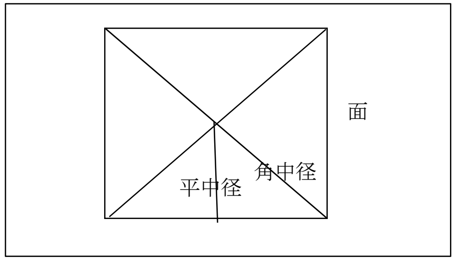
$x_3\equiv 0 \pmod{3}$　, $x_3\equiv 0 \pmod{8}$, $x_3\equiv 1 \pmod{5}$ より $x_3=96$

$a_1x_1\equiv y_1\times 1 \pmod{3}$, $a_2x_1\equiv 0 \pmod{8}$, $a_3x_1\equiv 0 \pmod{5}$ より $x_1=80$

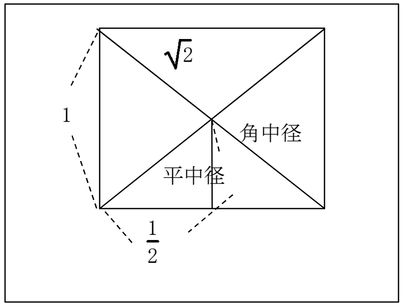
$a_1x_2\equiv 0 \pmod{3}$　, $a_2x_2\equiv y_2\times 1 \pmod{8}$, $a_3x_2\equiv 0 \pmod{5}$ より $x_2=75$

$a_1x_3\equiv 0 \pmod{3}$　, $a_2x_3\equiv 0 \pmod{8}$, $a_3x_3\equiv y_3\times 1 \pmod{5}$ より $x_3=24$

$x\equiv 5\times 80+7\times 75+7\times 24=1093 \pmod{3\times 8\times 5}$　, $x\equiv 13 \pmod{120}$



今正四角形の一辺が 1 寸のとき
平中径、角中径、面積はいくらか。
答　平中径 0.5 寸
　　角中径 0.707106781 少強寸
　　面積 1 寸
(解説)正方角形だから

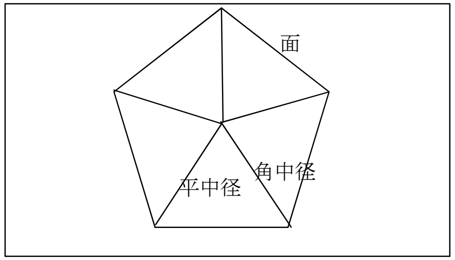


平中径は中心から底辺までの距離だから 0.5 寸

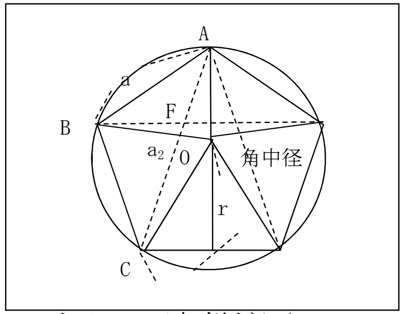
角中径は中心から底辺の端までの距離だから$\frac{\sqrt{2}}{2}$＝0.707106784 寸

面積は 1 寸

$2r=1$ ，$2R=\sqrt{2}$ より　$-1+2R^2=0$　　$R=0.707106781$



今正五角形の一辺が 1 寸のとき
平中径、角中径、面積はいくらか。
答　平中径 0.68819096 寸
　　角中径 0.850650808 少強寸
　　面積 1.7204774 寸
(解説)『題術辨議之法』問.13 参照
正五角形だから



△ABC と△AFB は相似だから
AC ： AB ＝AB ： AF ，　BC＝FC　AF＝a_2－FC＝a_2－BC
AB＝a ，AC＝a_2だから
(a_2-a) ： a ＝a ： a_2

$a_2^2-aa_2-a^2=0$　　　　　$a_2=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})a=1.618033988a$

内接円の半径を r とすると

$R^2-\frac{1}{4}a^2=r^2$　$a_2=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})a$ より $a_2^2=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})a^2$

$4(R^2-\frac{1}{4}a^2)=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})R^2$　　$4R^2-a^2=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\ R^2$

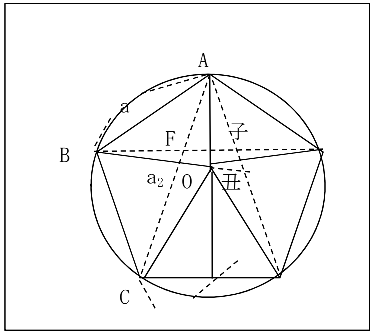
$8R^2-2a^2=3\ R^2+\sqrt{5}\ R^2$　　$R^2(5-\sqrt{5})=2a^2$

$R^2=\frac{2}{5-\sqrt{5}}a^2=\frac{5+\sqrt{5}}{10}a^2$　　$R=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}a$

R＝0.850650808 寸　　a＝1 のときは

$r^2=R^2-\frac{1}{4}=0.473606797$

r＝0.688190959 寸(0.5×tan54°)



$R^2(5-\sqrt{5})=2a^2$

$\sqrt{5}R^2=5\ R^2-2a^2$

$5R^4=25R^4-20R^2r^2+4a^4$

$5R^4-5R^2r^2+a^4=0$ の開方式を得る。

$R^2-\frac{1}{4}a^2=r^2$　　$\frac{5+\sqrt{5}}{10}a^2-\frac{1}{4}a^2=r^2$　　$5=100(r^2-\frac{1}{4}a^2)^2$

$1=20(r^4-\frac{1}{2}a^2r^2+\frac{1}{16}a^4)$　　$16a^4=20(16r^4-8a^2r^2+a^4)$

$4a^4=80r^4-40a^2r^2+5a^4$　　$80r^4-40a^2r^2+a^4=0$

$AF=a_2$, $EO=r_2$, $OD=b$

関の解法は

2△OAB＝□OABC である。

$4a^2r^2=a_2^2R^2$

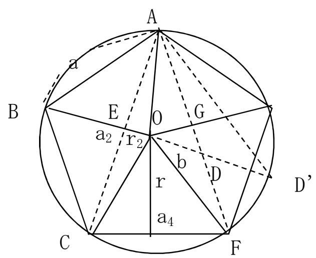
$2ar=a_2R$ だから

同様に $2a_2r_2=a_4R$ だから

$4aa_2rr_2=a_2a_4R^2$

$a_4=a$

だから



$4rr_2=R^2$・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(1)となる。

$b=R-2r_2$

$Rb=R^2-2Rr_2=-R^2+2R(R-r_2)$

$=-R^2+a^2$・・・・・(2)

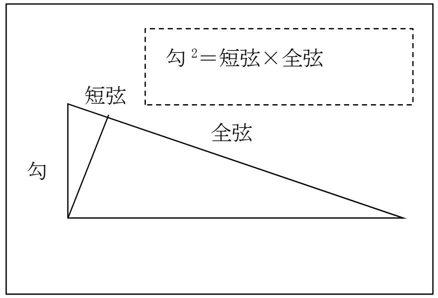
△ABD'は直角三角形 $2R(R-r_2)=a^2$

$\frac{1}{4}a^2+r^2=R^2$

$4R^2-a^2=4r^2$・・・・・・(3)

△OGD　b ： r_2 ＝R ： r

$rb=Rr_2$　・・・・・・・・(4)



(2)×(3)にして(1)(4)より

$4r^2Rb=4Rrr_2=R^2R^2=(4R^2-a^2)(-R^2+a^2)$

$R^4=-4R^4+a^2R^2+4R^2a^2-a^4$

$-a^4+5R^2a^2-5R^4=0$

$R^2=\frac{5+\sqrt{5}}{10}a^2$　　$R^2=0.7236067977$

R＝0.8506508707a

r＝0.688190959 寸(a＝1 のとき)

面積 1.7204774 寸

正七角形の場合

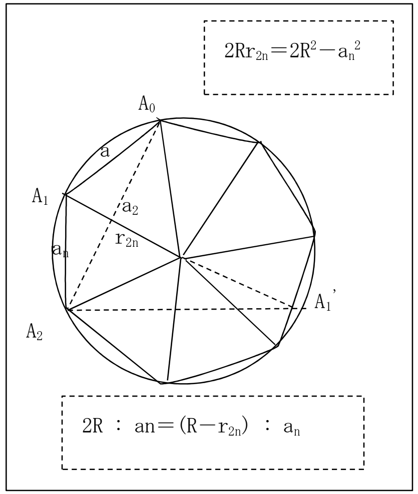
今正七角形の一辺が 1 寸のとき

平中径、角中径、面積はいくらか。

答　平中径 1.038260698 少強寸

　　角中径 1.15238235 半強寸

　　面積 3.633912444 少弱寸



正五角形から

$2ar=a_2R$ だから

同様に $2a_2r_2=a_4R$ だから

$4aa_2rr_2=a_2a_4R$

$a_4=a$

$2a_nr_n=a_{n+1}R$

だから $2ar=a_2R$ ，$2a_2r_2=a_3R$ ，

$2a_3r_3=a_4R$

$8ara_2r_2a_3r_3=a_2a_3a_4R^3$ となる。$a=a_4$

$8rr_2r_3=R^3$　　$Rb_3=R^2-a^2$　　$2Rr_2=2R^2-a^2$　　$4r^2=4R^2-a^2$

$4r^2Rb_32Rr_2=8R^3rr_2r_{32}$

$=(4R^2-a^2)(R^2-a^2)(2R^2-a^2)$

$=(4R^4-5a^2R^2+a^4)(2R^2-a^2)$

$=8R^6-10a^2R^4+2R^2a^4-4R^4a^2+5a^4R^2-a^6$

$=8R^6-14a^2R^4+7R^2a^4-a^6=R^6$

$7R^6-14a^2R^4+7R^2a^4-a^6=0$

$a=1$ のとき

$7R^6-14R^4+7R^2-1=0$

7　0　−14　0　7　0　−1　(1

　7　7　−7　−7　0　0

7　7　−7　−7　0　0　−1

　7　14　7　0

7　14　7　0　0

　7　21　0

7　21　28

7　28

7　28　28　0　0　0　−1　(0.1

　0.7　2.87　3.087　0.3087　0.03087　0.00308

7　28.7　30.87　3.087　0.3087　0.0308−0.99692

　0.7　2.94　3.381　0.6468　0.09555

7　29.4　33.81　6.468　0.9555　0.12635

　0.7　3.01　3.682　1.015

7　30.1　36.82　10.15　1.9705

　0.7　3.08　3.99

7　30.8　39.9　14.14

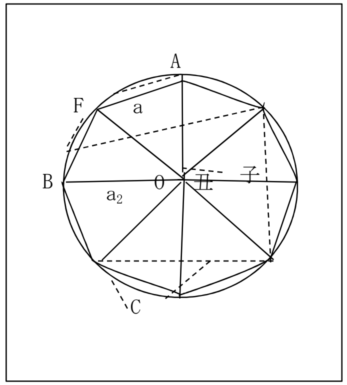
　0.7　3.15

7　31.5　43.05

　0.7

7　32.2

答　R=1.1・・・



$7R^6-14R^4+7R^2-1=0$　に $R^2=r^2+\frac{1}{4}$ を代入する

$7(r^2+\frac{1}{4})^3-14(r^2+\frac{1}{4})^2+7(r^2+\frac{1}{4})-1=0$ 整理すると

$448r^6-560r^4+84r^2-1=0$ となる。

一辺が 1 の正七角形をまとめると

外接円の半径は 1.152382435 半強

内接円の半径は 1.038260698 少強

積 3.6833912444 少弱

正八角形

$2R^4-4a^2R^2+a^4=0$

$a=1$ の場合

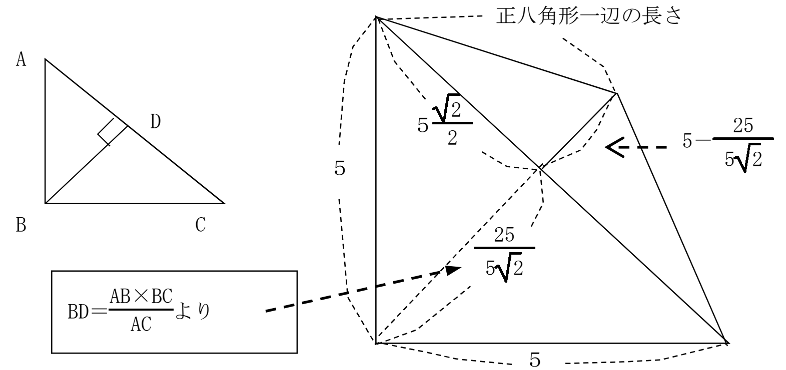
$R=1.306562964$ ，

外接円の半径は 1.306562964 太強, 内接円の半径は 1.207106781 少弱

積 4.828427124 少弱

正九角形
$3R^6-9a^2R^4+6a^4R^2-a^6=0$ となる
a＝1 の場合
外接円の半径は 1.419022,内接円の半径は 1.373738709
積 6.181824193
正十角形
$R^2-ay-a^2=0$ となる
a＝1 の場合
外接円の半径は 1.618033988, 内接円の半径は 1.53884176
積 7.694208842

は求円周率術並環矩術　求孤矢弦率術　求立玉積術よりなる。
関孝和とニュートンの補間公式のについて
関孝和の円周率の計算
関孝和は何通りかの円周率の計算方法を示しているが、中でも円周率をより正確に出すために次のようにしていることは注目すべきである。

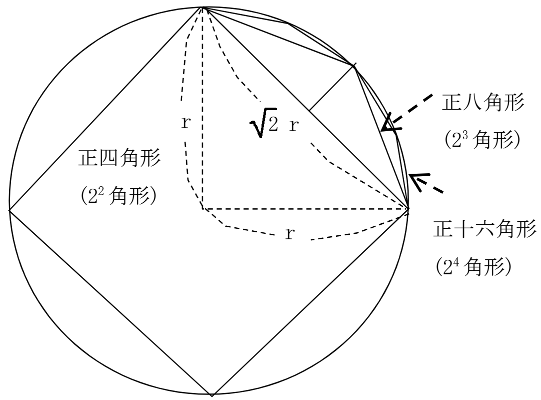


図のように正四角形を直径 1 尺(10 寸)の円の中に内接させると半径 r は 5 となる。

※正四角形一辺の長さは$\sqrt{2}$ ×5＝7.0710 6781 1865 4752 44 微弱

※四角形の周の長さは 4×$\sqrt{2}$ ×5＝28.2842 7124 7461 9009 76 微弱

正八角形の計算



直角三角形において

$BD=\frac{AB\times BC}{AC}$ であるから図のように$\frac{25}{5\sqrt{2}}$ を求め

正八角形の一辺の長さは図のようにして

$$\sqrt{\left(5\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(5-\frac{25}{5\sqrt{2}}\right)^2}=3.8268\ 3432\ 365\ 8977\ 17\text{ 強}$$

周の長さは 3.8268 3432 365 8977 17 強×8＝30.6146 7458 9207 1817 38 強とする。
このようにして計算していく(関孝和は計算式を書かず 2^{17} 角まで書いている)
円周率を求めるために直径 1 尺の円の中に正 2^{17}(131072)角形まで計算し、正確に求めるために前の値 2^{15}(32766)角形、2^{16}(65536)角形を次のように利用している。

a＝2^{15}(32768)角形の周＝31.4159 2648 7769 8567 08 弱
b＝2^{16}(65536)角形の周＝31.4159 2652 3865 9135 71 強
c＝2^{17}(131072)角形の周＝31.4159 2653 2889 9277 59 弱

として円周＝$b+\dfrac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}$ ＝31.4159 2635 9 微弱これを定周と言っています。

この式はどうしてだしたものかは書いてありませんが
後の和算家は増約術(等比級数)によって求めたものとしています。すなわち

$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5+\cdots\cdots=\dfrac{a}{1-r}$ となる。

今 a b＝a＋ar c＝a＋ar＋ar^2 といると

$b+\dfrac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}=\dfrac{a}{1-r}$ になり関孝和は円周率が 11 桁まで答は正確である。

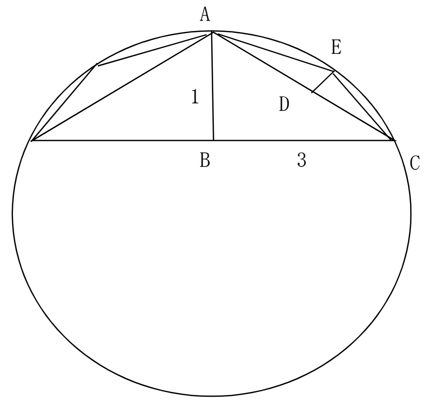
1680 年代に中国にもわが国にもここまで精通したものはいなかったと言われています。あるいは極限値の定則を利用して
x＝a＋h(b−a), x＝b＋h’(c−b) に於いて h＝h’として h を
h’に代入すれば

$x=b+\dfrac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}$ となる。

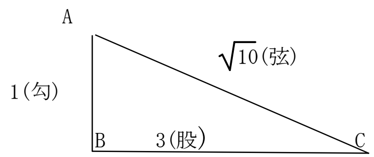
(参考) 関孝和の計算 ここで関孝和の計算結果
を見てみよう． これも井上ひさしの同じ本の
同じ 章にあるものを引用する.
h 正 h 角形の周の半分 8 角形 3.06146745892
16 角形 3.12144515225 32 角形 3.13654849054
64 角形 3.14033115695 128 角形 3.14127725093
256 角形 3.14151380114 512 角形 3.14157294036
1024 角形 3.14158772527 2048 角形 3.14159142151

4096 角形 3.14159234557 8192 角形 3.14159257658 16384 角形 3.14159263433 32768 角形 3.14159264877 65536 角形 3.14159265238 131072 角形 3.141592653288 強

弧背演段図



関孝和は直径 10 の円に弦 6,矢 1 を図のように考えて、
△ABC



前に述べたように江戸時代は勾股弦(直角三角形)と名前をつけているのでここでもこの様にする。これが円弧に 2 本斜辺を引いたと言うので
2 斜としている。

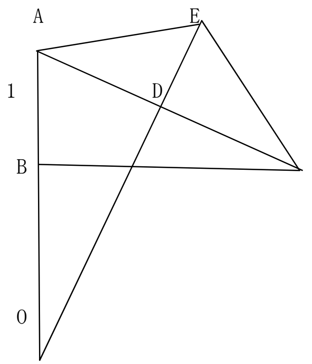
勾=1　,　股=3

弦=3.162277660168379332 微弱

背=2 弦=6.324555320336758664 微弱

次に

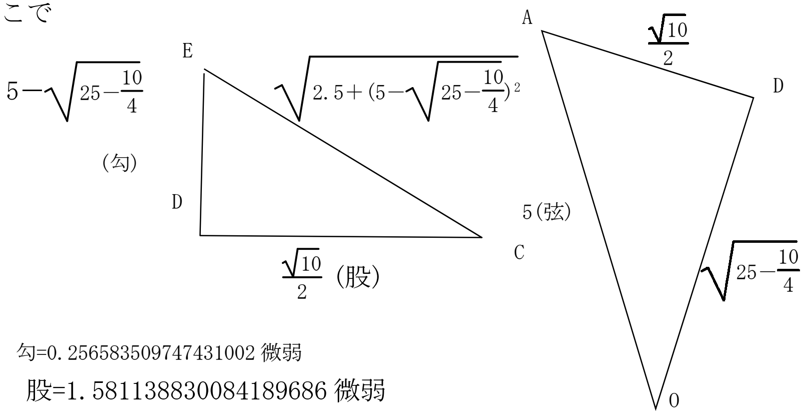
4 斜は 2 斜の図をもとにして中心 0△ADE で考えている。



もちろん後になれば和算家は公式も作っている。

少し大きくしてわかりやすくすると

そこで



勾=0.256583509747431002 微弱

股=1.581138830084189686 微弱

弦=1.601822430069672242 微強

背=4 弦=6.407289720278688968 微強

(8 斜)(16 斜)(32 斜)(64 斜)(128 斜)(256 斜)(512 斜)(1024 斜)(2048 斜)(4096 斜)を細かく計算しているが省くことにする。

図 3.17(2^{12}＝4096 斜と 2^{13}＝8192 斜を計算したところ)

2^{13}=8192 斜

勾=0.0000 0006 1704 7661 79 微強

股=0.0007 8542 3811 2135 56 強

弦=0.0007 8552 3813 6370 84 強

背=2^{13} 弦=6.4350 1108 1314 9959 08 弱

2^{14}=16384 斜

勾=0.0000 0001 5426 1915 69 弱

股=0.0003 9276 1906 8185 42 強

弦=0.0003 9276 1907 1214 83 強

背=2^{14} 弦=6.4350 1108 6278 3808 31 弱

2^{15}=32768 斜

勾=0.0000 0000 3856 5478 94 弱

股=0.0001 9638 0953 5607 42 弱弦

=0.0001 9638 0953 5986 09 強

背=2^{15} 弦=6.4350 1108 7935 1922 7208 強

ここで

a=6.4350 1108 1314 9959 08　　b=6.4350 1108 6278 3808 31

c=6.4350 1108 7935 1922 7208

s_1(甲定背)$=b+\frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}$

=6.4350 1108 7935 8438 68 を得ている。c_1＝1 寸

同様にして矢 2 寸，矢 3 寸，矢 4 寸，矢 4.5 寸，

s_2(乙定背)=9.2729 51218　　　　c_2＝2 寸

s_3(丙定背)=11.5927 9480 73　　　c_3＝3 寸

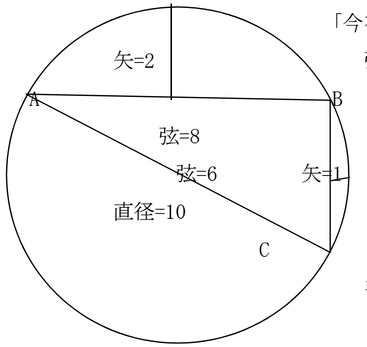
s_4(丁定背)=13.6943 8406 01　　　c_4＝4 寸

s_5(戊定背)=14.7062 8905 63　　　c_5＝4.5 寸

s_0は半円周だから

s_0=3.1415926535×10÷2=15.707963267

ここで『括要算法』に載せている問題を示してみる。



「今有弧形、只云、
弦八寸、矢二寸、則
問弧若干」
答曰　大弧九寸二
分七厘二毛九糸五
忽三微強
小弧六寸四分三厘五
毛〇一忽一微六繊強

（『括要算法』に書いてある数字をそのまま書いておく）

直径=d，弦=a，矢=c，小弧=b（BC の弧）、大弧=s（AB の弧）とすると

$s^2=\{(B_1cd^6+B_3c^3d^4+B_5c^5d^2)-(B_2c^2d^5+B_4c^4d^3+B_6c^6d+B_7c^7)\}\div B_8(d-c)^5$　$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8$ については後述する。

子位，	s^2	丑位，	$(d-c)^5$×1276900(B_8)
寅位，	cd^6×5107600(B_1)	卯位，	c^3d^4×43470240(B_3)
辰位，	c^5d^2×15047062(B_5)+寅位+卯位	巳位，	c^2d^5×23835413(B_2)
午位，	c^4d^3×37997429(B_4)	未位，	c^6d×1501025(B_6)

となり、

辰位－c^7×281290(B_7)　－巳位－午位－未位=子位×丑位

これから子位すなわち s^2 を求めることができる。これが上に示した式である。d=10，c=2 のとき

『括要算法』に計算された数字を計算してみる。

s^2={(10215200000000+3477619200000+48150598400)－(9534165200000+607958864000+960656000+36005120)}÷41841459200

=3597849073280÷41841459200

＝85.98765774　　　　　　s =9.272953

同様の計算を繰り返して

d=10，c=1 のときは

すなわち小弧　　b=6.4350116 を得ている。半径＝c_0，半円周＝s_0 として

54 ページの 5 個の矢 c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 と 5 個の背 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 から

これらを材料として補間公式を作り、係数を決定しょうとしている。

このことは本のどこにも書いてなく、多くの和算家は気づかなかったが

この公式を始めて指摘したのは三上義夫(1875~1950)であった。

ニュートンの補間公式から考える。

$$S^2=a^2+c^2\{A_0+A_1\frac{c-c_0}{d-c}+A_2\frac{(c-c_0)(c-c_1)}{(d-c)^2}+A^3\frac{(c-c_0)(c-c_1)(c-c_2)}{(d-c)^3}$$
$$+A_4\frac{(c-c_0)(c-c_1)(c-c_2)(c-c_3)}{(d-c)^4}$$
$$+A_5\frac{(c-c_0)(c-c_1)(c-c_2)(c-c_3)(c-c_4)}{(d-c)^5}\}$$

$c=c_0$ と置けば

第 2 項以下は 0 となるから $S^2=a^2+c^2A_0$

である。c_0 は半径だから　a=d，$s=\frac{1}{2}\pi d$ となるから、

$\frac{\pi^2d^2}{4}-d^2=c^2a_0$ は　$\frac{\pi^2d^2}{4}-d^2=\frac{d^2}{4}A_0$ だから

$A_0=\pi^2-4$ これを矢冪（しべき）法という。

ここが関孝和はニュートンの補間公式を使っていたとされる所である。

A_0=5.8696077218

$$s^2-(a^2+A_0c^2)=A_1\frac{c^2(c-c_0)}{d-c}+A_2\frac{c^2(c-c_0)(c-c_1)}{(d-c)^2}+A_3\frac{c^2(c-c_0)(c-c_1)(c-c_2)}{(d-c)^3}$$

＋・・・・・

$c=c_1$ と置くと、第2項以下0となるから

$s_1^2-(a_1^2+A_0c_1^2)=A_1\frac{c_1^2(c_1-c_0)}{d-c_1}$　　これから A_1 を求めて

$\frac{1}{2}A_1=$甲冪較$\times\frac{d-c_1}{c_1^2(d-2c_1)}$

=甲限度法

$c-c_0=-\frac{1}{2}(d-2c)$ となり、甲冪較$=A_1\times\frac{1c_1^2(d-2c_1)}{2\quad d-c_1}$

最初の補間公式に $c=c_2$，$c=c_3$，$c=c_4$，・・・と置くと

$-\frac{1}{2}A_2=$乙限度法、$\frac{1}{2}A_3=$丙限度法、$-\frac{1}{2}A_4=$丁限度法・・

と決定でき補間公式は

$s_2=$弦冪＋矢冪法$\times c^2-$甲限度法$\times\frac{c^2(d-2c)}{d-c}-$乙限度法

$\times\frac{c^2(d-2c)(c_1-c)}{(d-c)^2}$

$-$丙限度法$\times\frac{c^2(d-2c)(c_1-c)(c_2-c)}{(d-c)^3}$・・・・・・・・・・

この式を通分して詳しく計算すると $B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,B_7,B_8$ を求めることができる。

『括要算法』では

甲限度法$=\frac{\text{甲冪較}\times(\text{直径}-\text{甲矢})}{\text{甲離径}\times\text{甲矢}^2}$としている。

関孝和は大変な努力をしている。(原本では約 4 ページにわたり述べている)

$B_1=51076900$, $B_2=23835414$, $B_3=43470240$, $B_4=37997429$

$B_5=15047061$, $B_6=1501025$, $B_7=281292$, $B_8=1276900$

もっと詳しく研究したい方は次の書に詳しく説明してある。

『関孝和』(平山諦著恒星社厚生閣、昭和34年1959,)はニュートンの補間公式との関係を三上義夫の論文をもとに述べておられる。

ここがニュートンの補間公式に相当し、和算史上関孝和の独創として高く評価されるものとどの本もなっている。ただ有限個の公式だけで、正確な値は求められなく、関孝和が微積分に達していなかったものとみられている所である。

『括要算法』は誤りが多く、後に松永良弼（まつながよしすけ）(1690?～1744)と藤田貞資（ふじたさだすけ）(1734～1807)の訂正した求弧背術を参考にするとよい。その後、弧背を求める公式は関孝和の弟子たちから、そのまた弟子たちに受け継がれていった。

山路主住（やまじぬしずみ）（1704～1772)は関流の流れを汲む中根元圭（なかねげんけい）(1662～1733)

久留島義弘（くるしまよしひろ）（1690?～1757)，松永良弼（まつながよしすけ）(1690?～1744)に師事し、3人

の業績を全面的に集めたといわれるが、自己の著述は刊行しなかった。

後には弧背を求める公式は次の様にして求められた。

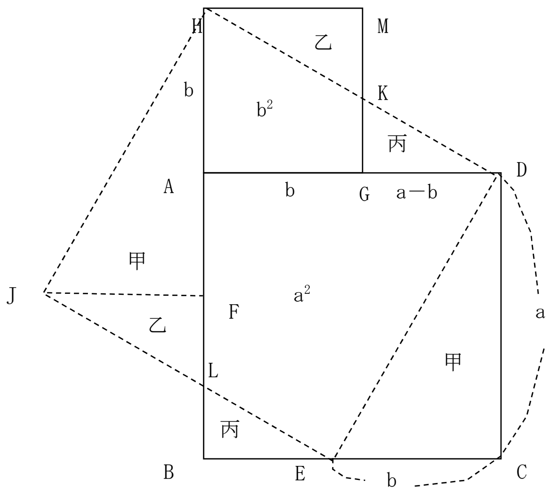
弧背を s，　矢を c，直径を d とすると

$$c=\{(\frac{s}{2})^2-\frac{(\frac{s}{3})^4}{d^2+0.1342(\frac{s}{2})^2}\}$$

として正多角形の外・内接円の径、面などの近似計算に利用されている。

『角中凡式廉術』は三角から五十角までの角径式(外接円の半径)、平径式(内接円の半径)を述べている。

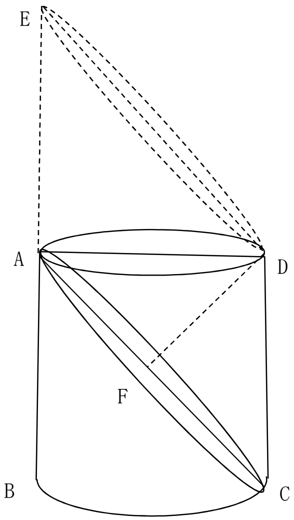
2.3 関孝和による三平方の定理の簡単な証明方法



△CDE において $ED^2=a^2+b^2$ を証明する方法として関孝和は ED を一辺とする正方形を描き、△CDE＝△EHJ の面積を甲、△EJL＝△HMK＝乙、△BEL＝△DGK＝丙、□ABCD＝a^2, □AGHM＝b^2 となるから簡単に証明した。

関孝和の考えた楕円の面積

図の円柱 ABCD を円柱の左上 A
と円柱の右下 C を斜めに切り
それを円柱の底辺 AD の上に
載せて斜めの円柱 ACDF を考える
この ACDE は楕円 AC を長径
とする高さ DF の円柱となる。
楕円 AC の面積を S とすると
円柱 ACDE の体積＝S×DF
これは円柱の体積に等しいから
円柱 ACDE の体積＝円柱の体積
　＝S×DF
　＝円 BC の面積×AB



$=\pi\times(\frac{BC}{2})^2\times AB=\frac{\pi}{4}BC^2\times AB$

すなわち $S\times DF=\frac{\pi}{4}BC^2\times AB$ となる。

一方△ADF∽△ACD(直角三角形で一つの角が等しい)

AD ： DF ＝AC ： DC

$AC=\frac{AD\cdot DC}{DF}$　　AD＝BC ,DC＝AB だから

$=\frac{BC\cdot AB}{DF}$

よって楕円の面積 S は

$S=\frac{\pi}{4}BC^2\times AB\times\frac{1}{DF}=\frac{\pi}{4}\times AC\times BC$

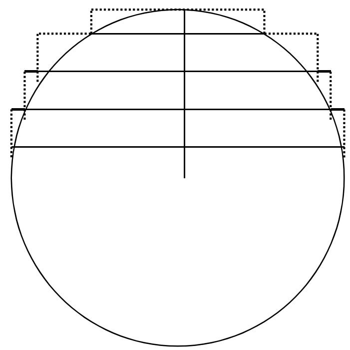
楕円で AC＝長径　，BC＝短径だから

$S=\frac{\pi}{4}$ ×長径×短径とした。

関孝和は球の体積を求めるために、球を切断して

球の体積=(直径)$^3\times\frac{\pi}{6}$

を証明している。



直径 10 寸の球の直径を
50 等分して平行平面で
球を切る。
すなわち 0.2 寸の平行平面
で 50 片の円台を作る。
それぞれの円台の底面の
直径を弦と言っている。

底面の直径をＤとすると、中心から上は 25 等分されるから
中心から底面の直径は 10, 9.6, 9.2, 8.8, 8.4, 8, 7.6, 7.2,・・となっていく。
各円台の底面の直径 10 だから
100, 92.16, 84.64, 77.44, 70.56, 64, 57.76, 51.84,・・・・・・・

100－92.16=7.84
100－84.64＝15.36
100－77.44＝22.56
7.84÷2×0.2=0.784 と次のページの様に計算する。
(7.84＋15.36)÷2×0.2=2.32
(15.36＋22.56)÷2×0.2=3.792
・・・・・・・・・・・・・・・・

中心から 25 等分した値

n	D	D^2	100－D^2	$(A_n+A_{n+1}))／2×0.2＝B_{n+1}$
1	9.6	92.16	7.84＝A_1	0.784＝B_1
2	9.2	84.64	15.36＝A_2	2.32＝B_2
3	8.8	77.44	22.56＝A_3	3.792＝B_3
4	8.4	70.56	29.44＝A_4	5.2＝B_4
5	8	64	36＝A_5	6.544＝B_5
6	7.6	57.76	42.24＝A_6	7.824＝B_6
7	7.2	51.84	48.16＝A_7	9.04＝B_7
8	6.8	46.24	53.76＝A_8	10.192＝B_8
9	6.4	40.96	59.04＝A_9	11.28＝B_9
10	6	36	64＝A_{10}	12.304＝B_{10}
11	5.6	31.36	68.64＝A_{11}	13.264＝B_{11}
12	5.2	27.04	72.96＝A_{12}	14.16＝B_{12}
13	4.8	23.04	76.96＝A_{13}	14.992＝B_{13}
14	4.4	19.36	80.64＝A_{14}	15.76＝B_{14}
15	4	16	84＝A_{15}	16.464＝B_{15}
16	3.6	12.96	87.04＝A_{16}	17.104＝B_{16}
17	3.2	10.24	89.76＝A_{17}	17.68＝B_{17}
18	2.8	7.84	92.16＝A_{18}	18.192＝B_{18}
19	2.4	5.76	94.24＝A_{19}	18.64＝B_{19}
20	2	4	96＝A_{20}	19.024＝B_{20}
21	1.6	2.56	97.44＝A_{21}	19.344＝B_{21}
22	1.2	1.44	98.56＝A_{22}	19.6＝B_{22}
23	0.8	0.64	99.36＝A_{23}	19.792＝B_{23}
24	0.4	0.16	99.84＝A_{24}	19.92＝B_{24}
25	0	0	100＝A_{25}	19.984＝B_{25}
合計				333.2

円台の体積(截積（さいせき）という)は倍して 666.4 としている。
さらに 100 等分、200 等分して円台の体積を 666.6、666.65

と計算し、円周率のときと同じ増約術（ぞうやくじゅつ）で

a＝666.4,　b＝666.6,　c＝666.65

とすると

$$b+\frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}=666.6+\frac{0.2\times0.05}{0.2-0.05}$$

$$=666.6+\frac{1}{15}=\frac{2000}{3}$$

$\frac{2000}{3}$ を得ている。この体積は角柱の体積だからπを掛けて4で割る

ことで球の体積をえるという。

※注　$\frac{2000}{3}$ は球の体積に等しいから球の直径は10だから

$\frac{2000}{3}=\frac{1000\pi}{6}$ より $\pi=\frac{2000}{3}\times\frac{6}{1000}=$ だから $\frac{2000}{3}\times\frac{\pi}{4}=\frac{1000\pi}{6}$ となる。

この『括要算法』では

$\pi=\frac{355}{113}$ を使っているから $\frac{2000}{3}\times\frac{355}{113}\times\frac{1}{4}$

これは $\frac{355}{678}\times10^3=\frac{\pi}{6}\times10^3$ を証明したことになる。

実は 2n 等分、4n 等分、8n 等分したものはそれぞれ　$d^3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6n^2}\right)$，

$d^3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6(2n)^2}\right)$

$d^3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6(4n)^2}\right)$ となり、n→∞とする

とすべて $\frac{2}{3}d^3$ となる。

（『括要算法』の球の体積は直径を
三乗して円周率の1/6倍すればよいこと
を示したところである。）