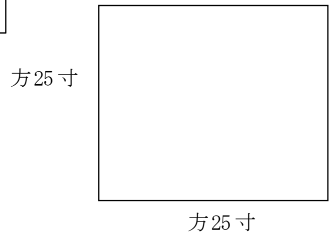
『求積』　関孝和著　　　　　　　　米光　丁

問.1　一辺が25寸の正方形の面積はいくらか。

一辺25寸の正方形の面積

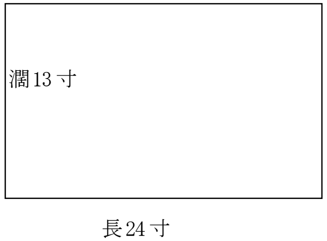


問.1（解法）答　$25^2=625$寸，

答　面積＝625寸

問.2 長24寸、潤濶13寸の長方形の面積はいくらか。
(和算では縦と横が現代と逆になる場合が多い。
ここでは横が長、縦が潤)

長が方24寸と潤13寸の長方形の面

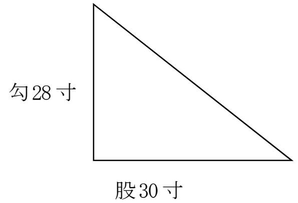


問.2(解法)　答　$24\times13=312$寸

答　面積＝312寸

問.3 勾28寸、股30寸の直角三角形の面積はいくらか。
(和算では直角三角形のことを勾股弦といい高さを勾、底辺を股という)

勾が28寸と股30寸の直角三角形の面積

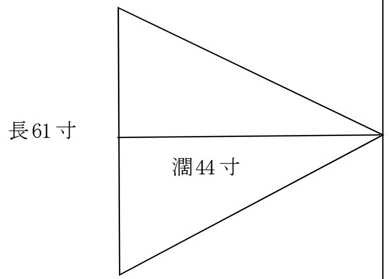


問.3(解法）答　$\frac{28\times30}{2}=420$寸

答　面積＝420寸

問.4
長61寸、潤44寸の二等辺三角形の面積はいくらか。

長が61寸と潤44寸の二等辺三角形の面積

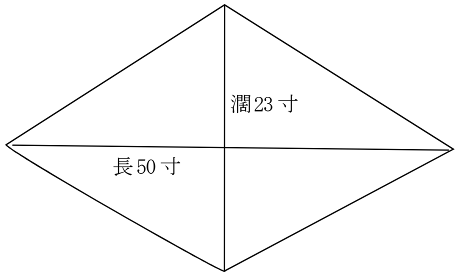


問.4(解法) 答$\frac{61\times44}{2}=1342$寸

答　面積＝1342寸

問. 5 長 50 寸、
濶濶23 寸の菱形の面積
はいくらか。

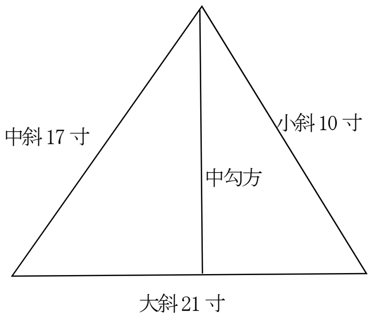
長が方 50 寸と濶 23 寸の菱形の面積



問. 5(解法) 答　$\frac{50\times23}{2}$＝575 寸『題術辨議之法』問. 5

答　面積＝575 寸

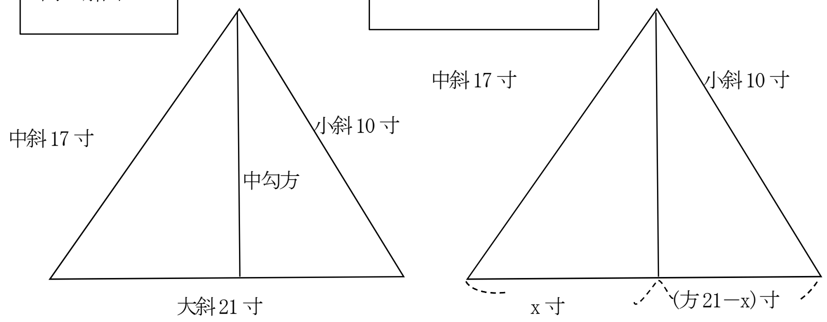
問. 6
大斜 21 寸、中斜 17 寸、
小斜 10 寸の三角形の面積はいくら
か



問. 6(解法)　答$\frac{21\times8}{2}$＝84 寸(中勾は右図より 8 寸)

問. 6 解図

中勾を求める図 1



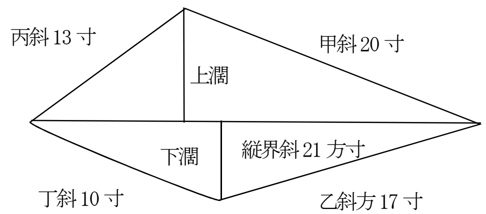
大斜が方 21 寸、中斜 17 寸、小斜 10 寸の三角形

$17^2-x^2=10^2-(21-x)^2$ より x＝15, 中勾は求められる

答　面積＝84 寸

問. 7
甲斜 20 寸、乙斜 17 寸、丙斜 13 寸、丁斜 10 寸、縦界斜 21 の四角形の面積はいくらか。

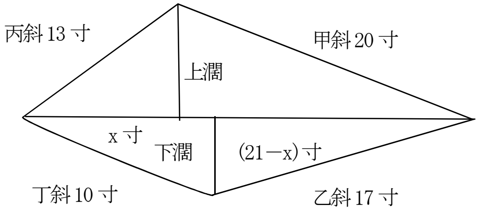
甲 20 寸、乙 17 寸、丙 13 寸、丁 10 寸の四角形の面



問. 7（解法）　別に上潤 12 寸、下潤 8 寸得る（解図）

答 $\frac{(上潤+下潤)\times 縦界斜}{2}=\frac{(12+8)\times 21}{2}=210$ 寸

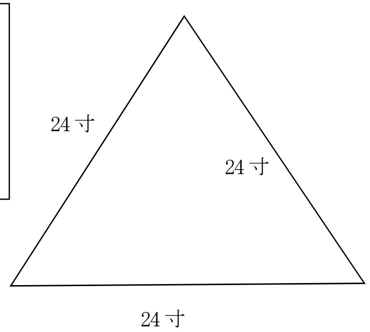
問. 7 の解上潤と下潤を求める図



$13^2-x^2=20^2-(21-x)^2$ より x=5, 上潤は求められる。

上潤 12 寸を得る同様にして下潤 8 寸得る

問. 8
一辺が 24 寸、の正三角形の面積はいくらか。

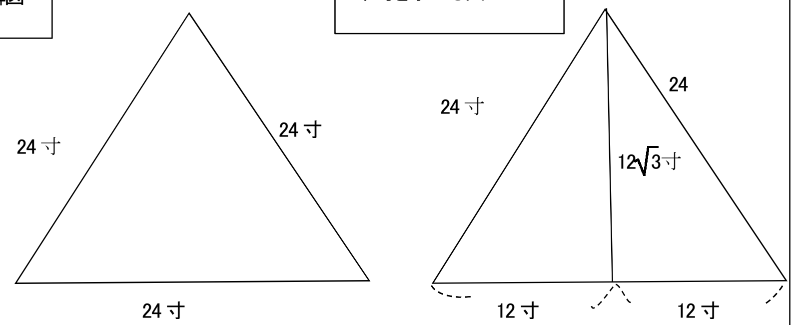


一辺が方 24 寸の正三角

問. 8（解法）

問.8 解図

中勾を求める図 1



一辺が方 24 寸の正三角形

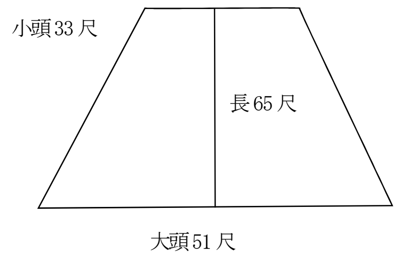
中勾は $12\sqrt{3}$ 方寸

左図より中勾 20.7846097 寸得る（$12\sqrt{3}$のこと）

答 面積$=\frac{24\times 12\sqrt{3}}{2}=144\sqrt{3}$寸$=249.4153162$ 寸

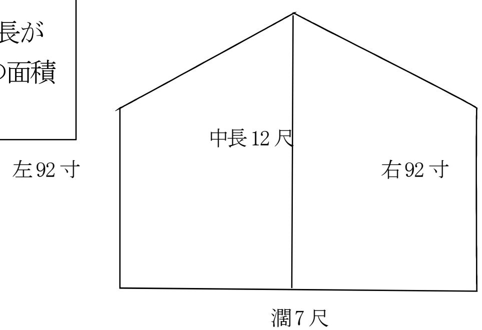
問. 9　大頭が 51 尺、小頭が 33 尺、長 65 尺、の台形の面積はいくらか。

上辺が方 33 尺、下底が 51 尺、高さ 65 尺の台形



問. 9（解法）

問. 10
左右長が 92 寸、中長が 12 尺、潤濶7 尺、の面積はいくらか。

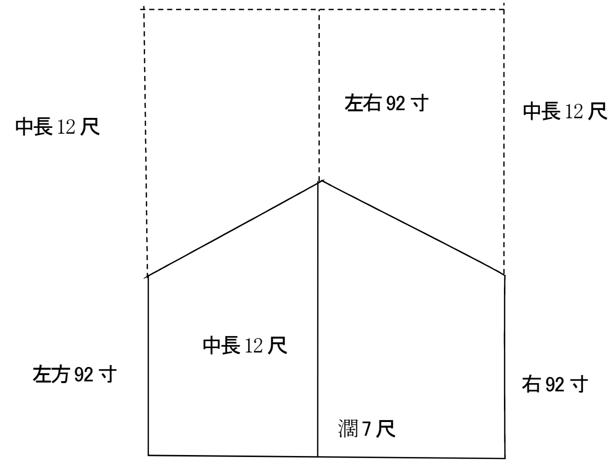


左右が 92 寸、底辺が 7 尺、高さ 12 尺の 2 つの台形の面積

答　面積＝$\frac{(51+33)\times65}{2}$＝2730 尺

問. 10（解法）

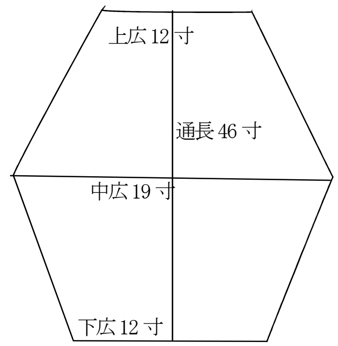
問10 解図 1



面積は(9.2＋12)7÷2＝74.2 尺、

答　面積＝$\frac{(9.2+12)\times7}{2}$＝74 尺 2 寸

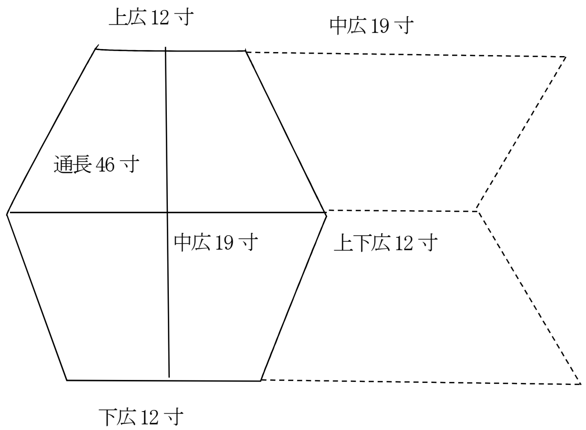
問. 11　上下広が 1 尺 2 寸、中広が 1 尺 9 寸、通長 4 尺 6 寸、の鼓(梯を下底で合わせたもの)の面積はいくらか。



上下広が 12 寸、中広が 19 尺、高さ 46 寸の 2 つの台形の面積

問. 11（解法）

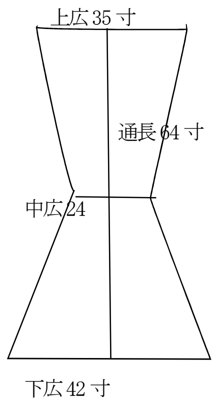
問. 11 解図 1



面積は(12＋19)×方 46÷2＝713 寸

答　　面積＝$\dfrac{(12+19)\times 46}{2}$＝713 寸

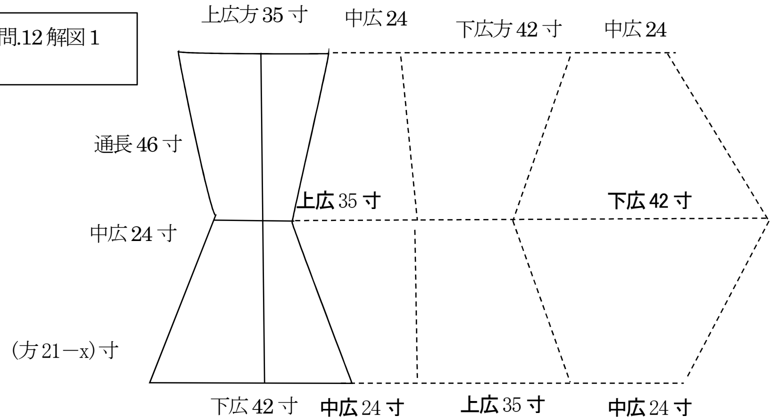
問.12　上広が３尺５寸、中広が２尺４寸、下広４尺２寸、通長６尺４寸の三三広広（さんこう）(腰鼓(梯を上底で合わせた形)の平行線の長さが違うもの)の面積はいくらか。



上広が 35 寸、下広が 42 寸、中広が 24 寸、高さ 46 寸の２つの台形

問. 12（解法）

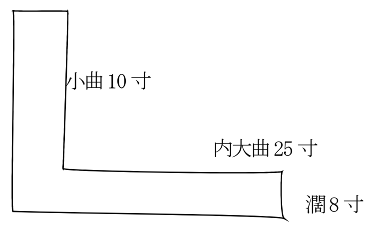
問.12 解図 1



面積は(24×2＋35＋42)×方 64÷4＝2000 寸

答　　面積＝$\dfrac{(24\times 2+35+42)\times 64}{4}$＝2000 寸

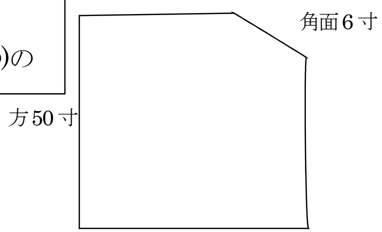
問. 13　内大曲が２尺５寸、小曲が１尺、濶闊が８寸、曲尺の面積はいくらか。



小曲が方 10 寸、内大曲が 25 寸、濶方 8 寸の曲尺の面

問. 13（解法） 答 面積＝（25＋10＋8）×8＝344 寸

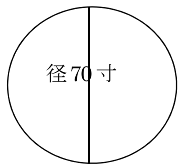
問. 14 方が５尺、角面が６寸、抹抹(まっ)角角(かく)(正方形の一角を切ったもの)の



一辺が方 50 寸、角面が 6 寸、抹抹角の面積

問. 14（解法） 答 面積＝$50\times50-\frac{36}{2}$＝2482 寸

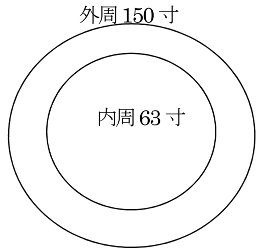
問. 15 直径が７尺、円の面積はいくらか。



直径が 70 寸、円の面積

問. 15（解法） 答 面積＝$\frac{4900}{4}\times\frac{355}{113}$＝3848 寸$\frac{51}{113}$

問. 16 外周が 150 寸、内周 63 寸の環の面積
はいくらか。



外周が 150 寸、内周が 63 寸の円の面積

問. 16（解法）

答 150－63＝87，150＋63＝213，213×87＝18531

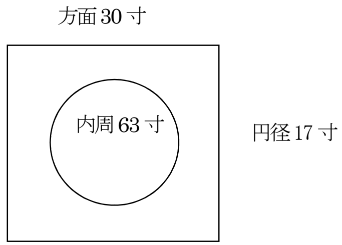
$18531\times\frac{113}{4\times355}$＝1474 寸 65

（現代解） 面積＝$\frac{1}{4\pi}(150^2-63^2)$

＝$\frac{113}{4\cdot355}(150^2-63^2)$＝1474. 65 寸

問. 17 方面が３尺、円径１尺７寸の火塘火塘(かとう)(正方形の中から円
を切り取ったもの)の面積はいくらか。

355



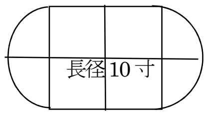
方面が方 30 寸から円径が 17 寸の円を取った面積

問. 17(解法)

答　$900-\frac{289\times355}{4\times113}=\frac{900\times4\times113-289\times355}{4\times113}=673\frac{9}{452}$寸

(現代解) $\pi=\frac{355}{113}$として計算している。

問. 18　長径が1尺、短径7寸の帯直円(長方形の左右に半円を付けたもの)の面積はいくらか。



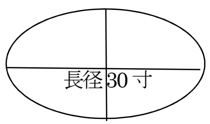
円径が7寸の円と縦横が10，7寸の正方形に円を加えた面積

問. 18(解法)

答　10－7＝3，3×7＝21，$\frac{49\times355}{4\times113}=38.48451327$　，

面積＝38.48451327＋21＝59.48451327

問. 19
長径が3尺、短径1尺3寸の側円(楕円)の面積はいくらか。

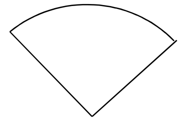


長径が30寸、短径が13寸の楕円の面積

問. 19(解法)　答　$\frac{30\times13\times355}{4\times113}=306.3053097$寸

(現代解) 楕円の面積は長径×短径×$\pi\div4$

問. 20　湾が1尺8寸、径1尺1寸の扇形の面積はいくらか。

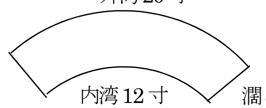


弧が方18寸、径が11寸の円弧の面積

問. 20(解法)

答　面積＝$\frac{1}{2}\times18\times11=99$寸 (現代解) 円弧の面積は弧×半径

問.21　外湾が2尺、内湾1尺2寸、濶潤が各8寸、の車輞(しゃもう)車輞(扇形を同心円で切り取

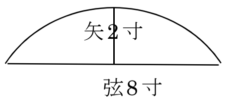


外湾が20寸、内湾が12寸、濶8寸の車輞の面積

問. 21(解法)　答　$\frac{(20+12)\times8}{2}=128$寸

(現代解) 円弧の面積は弧×半径より$\frac{(20+12)\times8}{2}=128$寸

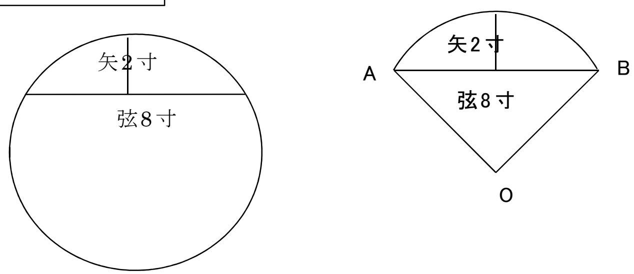
問.22
矢が２寸、弦８寸、の弧の面積はいくらか。



弦が８寸、矢が２寸の弧の面積

問. 22(解法)　別に求める。円径１尺、背９寸 272952 答 $\frac{5\times9.272952}{2}-12=11$ 寸 18238

問.22 解図



弦が８寸、矢が２寸の直径は 10 寸で円弧は 9.272952 としている

『関孝和全集』『規矩要明算法』p. 6 弧矢弦術では

$$s^2 = 弦^2 + 5.8596 矢^2$$

s＝9. 3508 の式を使っているが($\pi^2 - 4 = 5.8596$)

『拾璣算法』の背と同じ式 $2 径 \sin^{-1}\sqrt{\frac{矢}{径}} = 2 径 \sin^{-1} 0.447213$

$= 20\times26.565\times3.14159\div180 = 9.272932383$ とほぼ近い値 9. 272952 をだしている。どのようにして求めたかわからない。

関の弟子で建部賢弘(1644～1739)が発見したとされる

$$\left(\frac{孤周}{2}\right)^2 = 矢径 + \frac{2^2}{3\cdot4}矢径\left(\frac{矢}{径}\right) + \frac{2^2\cdot4^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6}矢径\left(\frac{矢}{径}\right)^2 + \frac{4^2\cdot6^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}矢径\left(\frac{矢}{径}\right)^3 + \cdot\cdot\cdot\cdot$$

を利用すれば孤周＝9. 269・・・となる。

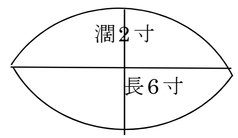
面積は弧 ABO の面積から三角形 ABO の面積を引いている。

弧の面積＝ $\frac{径・弧の長さ}{4}$ ，三角形の面積は $\frac{4\times6}{2} = 12$

$\frac{5\times9.272952}{2} - 12 = 11$ 寸 18238(参考)円弧の面積＝ $\frac{円径\times背-(円径-2矢)弦}{4}$

答　面積
＝11 寸１分８厘２毛 38 微弱

問.23　潤濶が２寸、長が６寸、の欖欖(らん)(弓形を２つ合わせたもの)の面積はいくら



潤が２寸、長が６寸の欖の面積

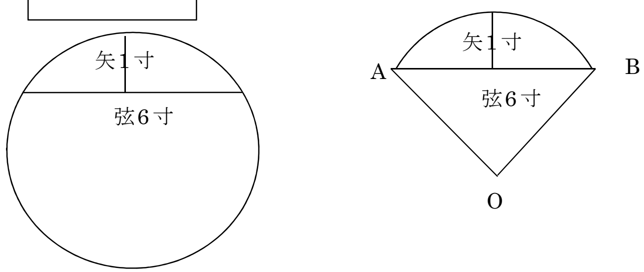
問. 23(解法)

別に求める。円径１尺、背６寸435011、背＝$10\cos^{-1}0.8=6.435009$

答

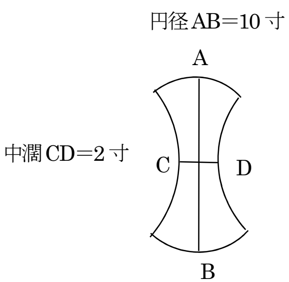
$2\left(\dfrac{5\times 6.435011}{2}-12\right)$　　面積＝８寸175055

問.23 解図



弦が６寸、矢が１寸の直径は10寸で円弧は6.435009としている

問. 24　中濶濶が２寸、円径が10寸、の錠錠(円の直径の両端で円弧を切り取った形)の面積はいくらか。



中濶が２寸、円径は10寸の錠の面積

問. 24(解法)

前問と同じ式２径$\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{矢}{径}}$＝２径$\sin^{-1}0.3162277=6.435008358$

$2\left(\dfrac{5\times 6.435011}{2}-12\right)=8$寸175055

別に求める。虚弦８寸、虚背９寸272952、

半円周15.70796寸＋8＝23.70796 ,23.70796－9.272952＝5.162056

5.162056×10＝51.6206

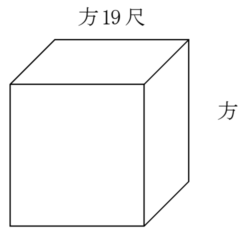
答　$\dfrac{2\times 8+51.6206}{2}=33$寸8103

(別解) $\pi\times r^2$－問22×4＝78.5398－44.7294＝33.8104

問. 25　答がはっきりしない。

立積

問.26　一辺が19尺の立方形の体積はいくらか。

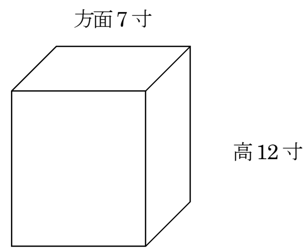


方(立方体の一辺)が19尺の立方体の体積

問. 26(解法)　答　$19^3=6859$尺,(体積 ＝方面^3)

答　体積=6859尺

問. 27　方面 7 寸、高さ 12 寸の方堡壔（ほうほとう）(正四角柱) の体積はいくらか。

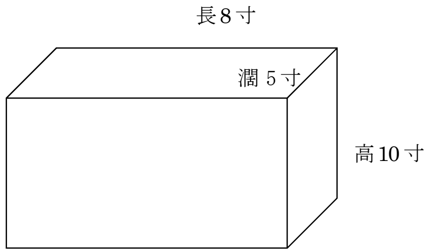


方面(正四角柱の上の正方形の一辺)が 7 寸、高さ 12 寸の正四角柱体積

問. 27(解法) 答　49×12＝588 寸
(体積 ＝高さ×方面^2)

答　体積＝588 寸

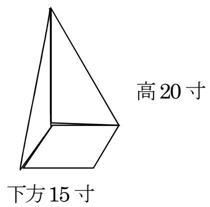
問. 28　長さ 8 寸、高さ 10 寸、濶（かつ） 濶（かつ）(長方形の短い方)5 寸の直堡壔の体積はいくらか



長が 8 寸、濶が 5 寸、高さ 10 寸の直方体の体積

問. 28(解法)　答　体積＝8×5×10＝400 寸 (直方体の体積 ＝長×濶×高さ)

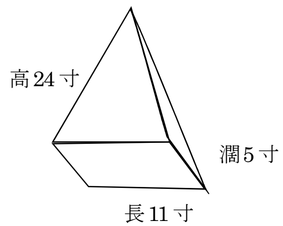
問. 29　下 15 寸、高さ 20 寸の方錘の体積はいくらか。



下方が 15 寸、高さ 20 寸の方錘の体積

問. 29(解法)　『題術辨議之法』問. 6 答　体積＝15^2×20÷3＝1500 寸(方錘の体積 ＝下方^2×高さ÷3)

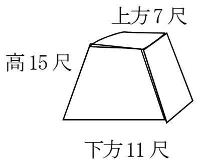
問. 30　長さ 11 寸、高さ 24 寸、濶 5 寸の方堡壔の体積



長が 11 寸、濶 5 寸、高さ 24 寸の方堡壔の体積

問. 30(解法) 答　体積＝11×5×24÷3＝440 寸,

問. 31　上方7尺、下方11尺、高さ15尺の方台の体積はいくらか。



下方が11尺、上方7尺、高さ15尺の方堡壔の体積

問. 31(解法)答　体積＝(49＋121＋11×7)×5＝1235尺

(別解)上方から頂点までをxとすると $x=\frac{105}{4}$, 下方から $\frac{165}{4}$ 体積＝$\frac{1}{3}(121\times\frac{165}{4}-49\times\frac{105}{4})$＝1235尺又は体積＝$\frac{1}{3}$×高さ(上の面積＋下の面積＋$\sqrt{上の面積\times下の面積}$)に代入して

＝5 (49＋121＋77)＝1235 としてもよい。『題術辨議之法』問. 2 参照

問. 32 解

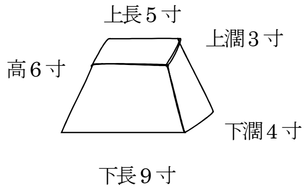
答　{(5×2+9)×3＋(9×2+5)×4}×6÷6＝149寸

(別解)

体積＝$\frac{1}{6}$×高さ{下長×上濶濶＋上長×下濶濶+2(下長×下濶濶＋上長×上濶濶)}

＝{9×3+5×4+2(9×4+5×3)}＝149 としてもよい。

問. 32
上濶3寸、上長5寸、下濶4寸、下長9寸、高さ6寸の直台(長方形の角錐台)の体積はいくか。



下長が9寸、下濶4寸、上長5寸、上濶3寸、高さ6寸の直台の体積

問. 32(解法)

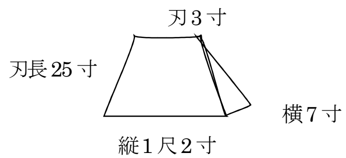
答　体積＝{(5×2+9)×3＋(9×2+5)×4}×6÷6＝149寸

(別解)

体積＝$\frac{1}{6}$×高さ{下長×上濶濶＋上長×下濶濶+2(下長×下濶濶＋上長×上濶濶)}

＝{9×3+5×4+2(9×4+5×3)}＝149 としてもよい。

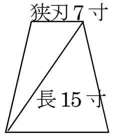
問. 33　縦1尺2寸、横7寸、刃3寸、長さ25寸の楔(くさび)の体積はいくらか。



縦1尺2寸、横7寸、刃3寸、長さ25寸の楔の体積

問. 33(解法) 答　体積＝{(2×12＋3)×7}×25÷6＝787.5 寸

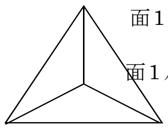
問. 34　広刃１尺、狭刃７寸、長さ 15 寸の楔楔の体積はいくらか。



広刃１尺、狭刃７寸、長さ 15 寸の楔の体積

問. 34(解法) 答　体積＝10×7×15÷6＝175 寸

問. 35　毎面１尺の莢莢菱菱(蕎麦のことで正四面体)の体積はいくらか。

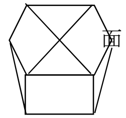


毎面１尺の正四面体の体積

問. 35(解法) 答　体積＝$\sqrt{\frac{10^6}{72}}$＝117.8511301 寸

(参考)(体積)^2＝$\frac{1}{72}$(一辺の長さ)^6 となる。『解見題之法』(別解)正三角形の外接円の半径を R とすると正弦定理より$\frac{\text{一辺の長さをaとする}}{\text{SinA}}$＝2R だから R＝$\frac{10\sqrt{3}}{3}$面積は $25\sqrt{3}$ 体積は $25\sqrt{3}\times\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{3}=\frac{250\sqrt{2}}{3}$＝117.8511301

問. 36　毎面１尺の切籠(立方体の８つの角を切り取ったもの)の体積はいくらか。



毎面１尺の切籠の体積

問. 36(解法)

答　体積＝$\sqrt{\frac{10^6\times50}{9}}$＝2357.022603 寸

(参考) 9(切籠子積)^2＝50(一辺の長さ)^6 となり、切籠の一辺の長さを a とすると、

立方体の一辺は $\sqrt{2}$a となる。一角を正三角形で切ると三角錐となる。

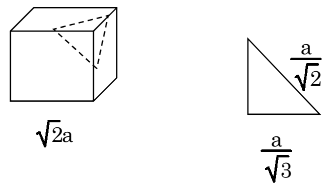
三角錐の一辺は a だから正三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ となる。

高さは $\frac{1}{\sqrt{6}}a$ となるから三角錐の体積は $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{1}{\sqrt{6}}a\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{24}a^3$ となる。

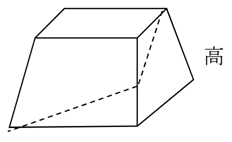
切籠は８個切るわけだから切籠積＝立方体の体積 $2\sqrt{2}a^3-\frac{\sqrt{2}}{3}a^3=\frac{5\sqrt{2}}{3}a^3$

問.36 解図
1

切籠の一辺の長さを a とすると
立方体の一辺は $\sqrt{2}$a となる。



問. 37　上方 6 寸、下方 9 寸、高さ 5 寸、右上の角より下の角まで切る上下の体積はいくらか。



上方 6 寸、下方 9 寸、高さ 5 寸、右上の角より下の角まで切る上下の体積

問. 37(解法)

答　(9×2＋6)×6^2×5÷15÷3＝96 寸(上積)

(6×2＋9)×9^2×5÷15÷3＝189 寸(下積)

(参考)

三角錐 B’D’G は$\frac{1}{6}$(2 上方)^2×高さ、三角錐 AD’G は$\frac{1}{6}$(上方)^2×(三角錐の高さ)

上方を a, 下方を b, 高さを h, 三角錐までの下からの高さを x とする。

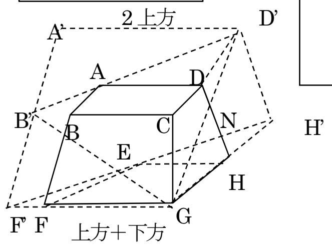
h ： (a＋b)＝x ： b　　x＝$\frac{hb}{a+b}$従って上からの高さは h－x＝$\frac{ha}{a+b}$

上積＝$\frac{1}{6}$(2 上方)^2×高さ－$\frac{2}{6}$(上方)^2×$\frac{\text{上方×高さ}}{\text{上方＋下方}}$より

上積＝(上方)^2{上方＋2(下方)}×高さ÷3(上方＋下方)

下積＝(下方)^2{下方＋2(上方)}×高さ÷3(上方＋下方)となる。

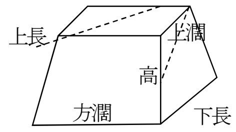
問.37 解図
1



上方 6 寸、下方 9 寸、高さ 5 寸、右上の角より下の角まで切る上下の体積

問. 38

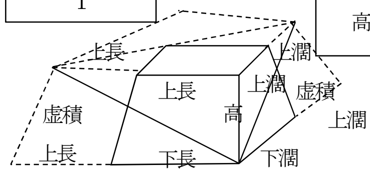
上濶濶6 寸、上長 10 寸、下濶濶9 寸、下長 15 寸、高さ 12 寸、右上の角より下の角まで斜めに切る上下の体積はいくらか。



上濶濶6 寸、上長 10 寸、下濶濶9 寸、下長 15 寸、高さ 12 寸、右上の角より下の角まで切る上下の体積

問.38 解図
1

上濶濶6 寸、上長 10 寸、下濶濶9 寸、下長 15 寸、高さ 12 寸、右上の角より下の角まで切る上下の体積



問. 38(解法)

答

$$\frac{12\{2(\text{上濶}^2\times\text{上長}^2)+(\text{上濶}^2\times\text{上長}\times\text{下長}\times3)+(\text{上濶}\times\text{上長}^2\times\text{下濶}\times3)+(\text{上濶}\times\text{上長}\times\text{下濶}\times\text{下長}\times4)\}}{6(\text{上濶}+\text{下濶})\times(\text{上長}+\text{下長})}$$

$$\frac{12(7200+16200+16200+32400)}{2250}=384(\text{上積})$$

12{2(上濶^2×下長^2)＋(上濶×上長×下濶×下長×2)＋(上濶×下長^2×下濶×3)＋(下濶^2×上長^2)　＋

(下濶^2×上長×下長×3)＋(下濶^2×下長^2×2)}÷(6(上濶＋下濶)×(上長＋下長)＝

$12\{2(6^2\times15^2)+(6\times10\times9\times15\times2)+(6\times15^2\times9\times3)+(9^2\times10^2)\quad+(9^2\times10\times15\times3)+(9^2\times15^2\times2)\}$

$\div6(6+9)\times(10+15)=1701000\div2250=756$（下積）

$(6^2\times10^2\times2)+(6^2\times10\times15\times3)+(6\times10^2\times9\times3)$

$+(6\times10\times9\times15\times4)=72000$ 寸

$72000\times12=864000$

$(6+9)\times(10+15)=375\times6=2250$

$864000\div2250=384$（上積）

$(6^2\times15^2)+(6\times10\times9\times15\times2)+(6\times9\times15^2\times3)$

$+(10^2\times9^2)+(10\times9^2\times15\times3)+(9^2\times15^2\times2)=141750$ 寸

$8100+16200+36450+8100+36450+36450=141750$

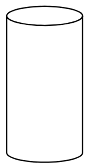
$141750\times12=1701000$

$(6+9)\times(10+15)=375\times6=2250\qquad1701000\div2250=756$（下積）

答　上の体積＝384 寸，下の体積＝756 寸

問.39

径５尺、高さ７尺、円堡壔（えんほとう）(円柱)の体積はいくらか。



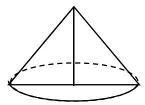
径５尺、高さ７尺、円堡壔(円柱)の体積

問. 39（解法）

答　体積＝$\dfrac{25}{4}\pi\times7=137.44465$ 尺

問.40

下周７尺１寸、高さ４尺８寸、円錘の体積はいくらか。

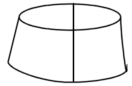


下周７尺１寸、高さ４尺８寸、円錘の体積

問. 40（解法）答　体積＝$\dfrac{7.1^2}{4\pi}\times4.8\times\dfrac{1}{3}=6.418401$ 尺

問.41

上径３寸、下周１尺５寸、高さ４寸、円台の体積はいくらか。



上径３寸、下周１尺５寸、高さ４寸、円台の体積

問. 41（解法）

答　$9\times150\times3\times355+(15\times355)^2+113\times355\times15\times3$

$=1134225+2873025+1805175=581425$

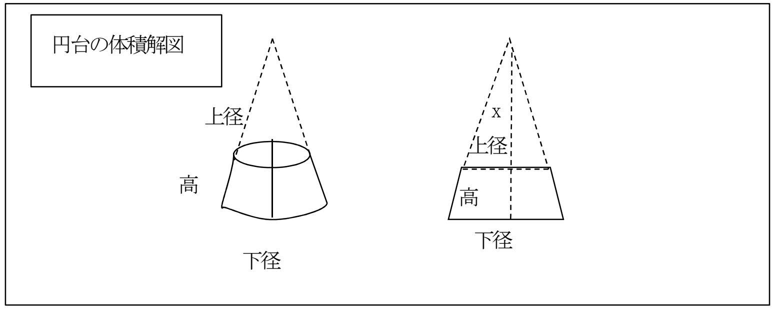
体積＝$\dfrac{581425\times4}{113\times355\times12}=\dfrac{23249700}{481380}=48\dfrac{2391}{8023}=48.29801819$

(参考)

円台の体積＝$\{(\text{上径}+\text{下径})^2-\text{上径}\times\text{下径}\}$高さ$\times\dfrac{\pi}{4}\div 3$

$=\{(3+\dfrac{15}{\pi})^2-3\times\dfrac{15}{\pi}\}4\times\dfrac{\pi}{4}\div 3$

$\dfrac{15}{\pi}=\dfrac{1695}{355}$だから$=(\dfrac{7617600}{126025}-\dfrac{1805175}{126025})\dfrac{355}{339}=48.29801819$



上：(x－高)＝下　：x　　上x＝下(x－高)　　$x=\dfrac{\text{下・高}}{\text{下－上}}$

$x-\text{高}=\dfrac{\text{下・高}}{\text{下－上}}\ -\text{高}=\dfrac{\text{上・高}}{\text{下－上}}$

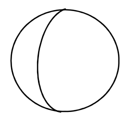
円台の体積＝$\text{下径}^2\times\dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{\text{下・高}}{\text{下－上}}\div 3-\text{上径}^2\times\dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{\text{上・高}}{\text{下－上}}\div 3$

$=(\text{下径}^2\times\dfrac{\text{下}}{\text{下－上}}-\text{上径}^2\times\dfrac{\text{上}}{\text{下－上}})\text{高}\times\dfrac{\pi}{4}\div 3$

$=\{\text{下径}^3-\text{上径}^3)\dfrac{1}{\text{下－上}})\text{高}\times\dfrac{\pi}{4}\div 3$

$=\{(\text{上径}+\text{下径})^2-\text{上下})\text{高}\times\dfrac{\pi}{4}\div 3$ となる。

問.42
径３尺、立円(球)の体積
はいくらか。

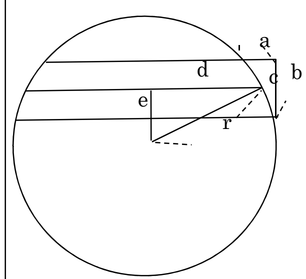


径３尺、球の体積

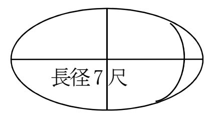
問. 42(解法)

答　体積＝$\dfrac{3^3}{6}\pi=14.137164$ 尺

(参考)球を微小さな厚さに切断してｃは円周の
微小部分である。
ｃ：ｂ ＝ｒ：ｄ より cd＝rb さらに $2\pi cd=2\pi rb$
これを集めて全球表面積Ｓにする。
$S=2\pi r\Sigma b=2\pi rD=\pi D^2$
球全体の体積Ｖは高さをｒとして円錐の集まりと考え
体積は表面積×半径÷３すなわち
$V=\dfrac{1}{3}Sr=\dfrac{1}{6}\pi D^3$ としている。



問.43
長径７尺、短径５尺の長立
円(楕円の長径を軸として
回転させたもの)の体積
はいくらか。



長径７尺、短径５尺の楕円体の
体積

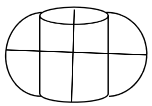
問. 43（解法）

答　体積＝$\frac{50^2\times70}{6}\pi$＝91629.766664 寸

（参考）長立円の体積＝短径^2×長径×π÷6

問.44
長径４尺１寸、短径１尺の長帯堡円(円柱の両端に半球を付けたもの)の体積はいくらか。

短径１尺



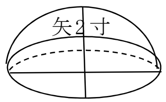
長径４尺１寸

長径４尺１寸、短径１尺の長楕円体の体積

問. 44（解法）

答　体積＝$\frac{(41\times3-10)\times100}{12}\pi$＝2958.332466 寸

問.45
矢２寸、弦８寸の球欠の体積はいくらか。



弦８寸

矢２寸、弦８寸の球闕の体積

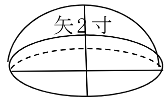
問. 45（解法）

答　体積＝$\frac{(8^2\times3+4\times4)\times2}{24}\pi$＝54.45426132 寸

（参考）球欠積は$\left(\frac{3}{2}\times\frac{弦^2}{4}\times\frac{矢}{3}+\frac{矢^3}{6}\right)\pi$

問45 解図

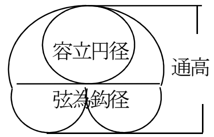
矢２寸、弦８寸の球闕の体積



弦８寸

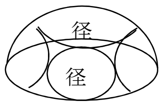
通高＝$\frac{1}{2}$矢

解見題之法の解図



球闕積＝矢(4 矢^2＋3 弦^2)$\frac{\pi}{24}$

問.46
径各１尺、の円截籠(球を内接立方体の面に沿って切り取った形)の体積
はいくらか。



径各１尺、の円截籠(球を内接立方体の面に沿って切り取った形)の体積

問. 47(解法)

答　体積$=\dfrac{(81-61)^2\times(81+61)\times113}{32\times355}=565$ 寸

$(\dfrac{20}{\pi})^2\dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{(81+61)}{2}=\dfrac{25\times71}{\pi}=565$　　ただし$\pi=\dfrac{355}{113}$

問. 46(解法)

立円径(全体の球の直径)＝14. 142135 寸

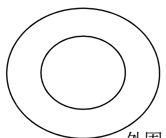
答　体積$=\dfrac{(10\times15-8\times14.142135)\times100}{12}\pi=965.068788$ 寸

(別解) 立円径$=10\sqrt{2}$寸、矢矢$=10(\sqrt{2}-1)\div2$，円截籠の弦 10 寸従って

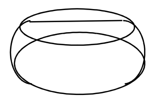
問. 45 より円截籠の 6 個の欠積は$6\{\dfrac{100}{4}\times5(\sqrt{2}-1)\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{125}{6}(\sqrt{2}-1)^3\}\pi$

円截籠の積は$\dfrac{\pi}{6}(10\sqrt{2})^3-250(4\sqrt{2}-5)\pi=1480.96067-515.8920126\fallingdotseq$ 965. 068658 寸

問. 47
内周６尺１寸、外周８尺１寸の円環の体積
を求めよ。



問.48
矢２寸、虚径１尺１寸、高さ８寸の外正弧環(弓形の弦と回転軸が直角)の体積を求めよ。
ただし旁円径＝1 尺、弧積＝11. 1825、$\pi=\dfrac{355}{113}$とする。



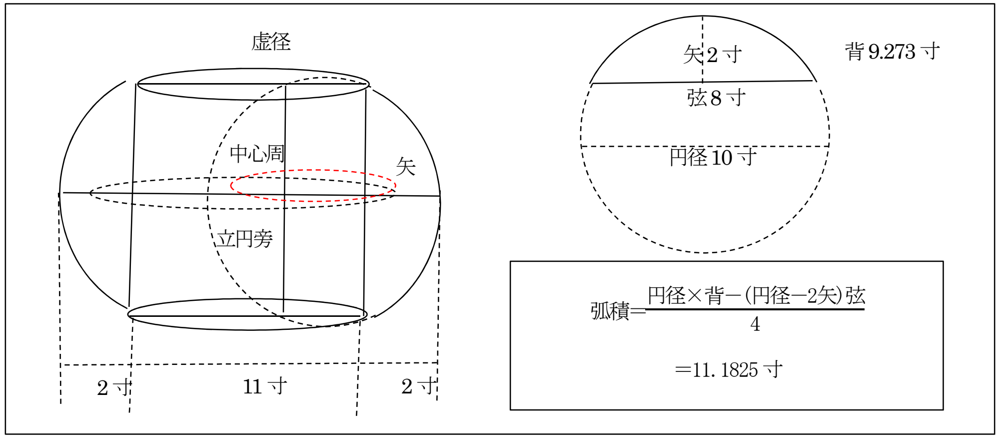
矢２寸、虚径１尺１寸、高さ８寸の外正弧環(弓形の弦と回転軸が直角)の体積

問. 48(解法)

答　体積$=\dfrac{\{(11+4-10)\times 11.1825\times 6+8^3\}\times 355}{6\times 113}=443.73691$ 寸

（参考）『毬闕変形草』問２と同じ問題、外正弧環の体積$=\dfrac{\pi}{6}\{$高さ$^3+6$ 弧積(虚径＋２矢旁円径)$\}$と『毬闕変形草』で孝和は表した。

(解説)



『求積』

背$=2\sqrt{矢\times 円径}\{1+\dfrac{1}{3!}(\dfrac{矢}{円径})+\dfrac{3^2}{5!}(\dfrac{矢}{円径})^2+\dfrac{3^25^2}{7!}(\dfrac{矢}{円径})^3+\cdots\}$

$\fallingdotseq 8.944271908(1+0.03333+0.003+0.000356+\cdots)=9.2724283\cdots$

$\fallingdotseq 9.273$ 寸

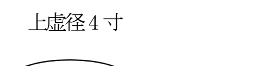
（現代では）

背$=20\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{矢}{円径}}=20\sin^{-1}\sqrt{0.2}=20\times 26.5650\times\pi\div 180=9.272932$

外正弧環の体積 $V=\dfrac{\pi}{6}(8)^3\div(11.1825\times\pi)=7.631$ 矢＝2 だから 2AG＝1.631

$V=$弧積$(11.1825)\times\pi\times(11+1.631)=443.7377984$

問.49
上虚径 4 寸、下虚径 7.6 寸、高さ 2.6 寸の外偏弧環(弓形の弦と回転軸が外向き)の体



問. 49(解法)

答　体積＝

$\dfrac{[3.1623^3\times 2.6-\{5.2\times 9.4869-(4+7.6)\times 3.1623\}\times 0.54376\times 3]\times 0.52359882}{3.1623}$

$=10.1972$ 寸

『求積』

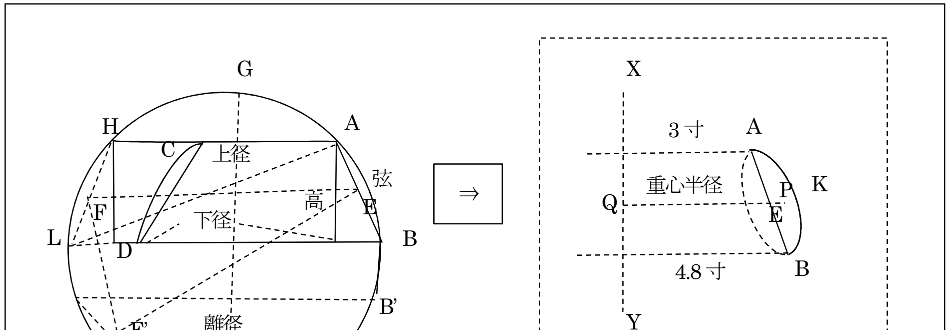
（参考）

円欠積＝弧積$=\dfrac{円径\times 背-(円径-2矢)弦}{4}$

(解説)

外偏弧環の体積$=\{$弦$^{32}\times$高-3 円欠積(2 高×離径－上下径和×弦)$\}\dfrac{1}{弦}\times\dfrac{\pi}{6}$

と表すが



欠球BGL－欠球AGH－円錐台AHLB＝旁円偏弧環積

$$＝弦^2×高×\frac{\pi}{6}＝13.61356533$$

$$\frac{弦^2×高×\frac{\pi}{6}}{円欠積×\pi}＝重心旋転径(左右両円欠の重心距離)$$

重心旋転径＝13.61356533÷0.5437π＝13.61356533÷1.70808357＝7.970081539

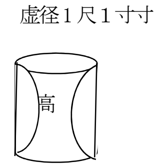
V＝(7.97－2＝5.97)×s×π(但し円弧積s＝0.5437)

V＝10.1975891 となる。

問.50

矢2寸、虚径1尺1寸、高さ8寸の内正弧環の体積を求めよ。

旁円径＝10寸4869、弧積＝11.1825、$\frac{\pi}{6}$＝0.52359882 とする。



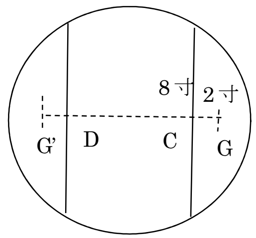
矢2寸、虚径1尺1寸、高さ8寸の内正弧環の体積

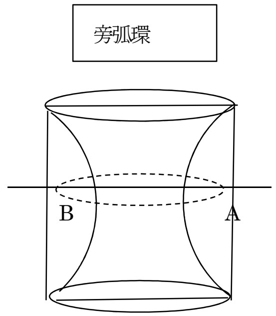
問.50(解法)

答　体積＝{(11－2×2＋10)×11.1825×6－8^3}×0.52359882＝329.1420722寸

円弧積＝11.1825　　$\frac{\pi}{6}$＝0.52359882

(解説)





$\frac{\pi}{6}D^3$÷(円弧積×π)＝GG'

図の環体のGG'は$\frac{\pi}{6}D^3$÷(円弧積×π)＝7.63097101, CD＝6だから

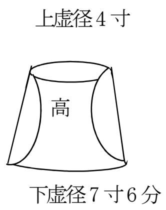
CG＋C'D＝1.63097101　　右の図で直径＝11寸

中心径ABは11－1.63097101＝9.36902899

環体の回転体積は9.36902899×π×11.1825＝329.1419758 となる。

問.51

上虚径4寸、下虚径7寸6分、旁円径1尺、高さ2寸6分の内偏弧環の体積を求めよ。旁離径＝9寸4869、弦3寸1623、弧積＝5分4375、$\frac{\pi}{6}=0.52359882$ とする



上虚径4寸、下虚径7寸6分、旁円径1尺、高さ2寸6分の内偏弧環の体積

問.51(解法)

{(4＋7.6)×3.1623＋2.6×2×9.4869}×0.54375×3＝140.3111205寸

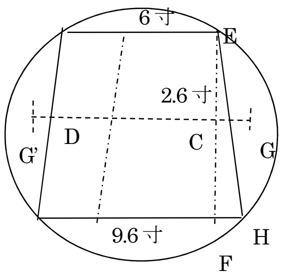
3.1623^3×2.6＝82.22096　　140.3111205－82.22096＝58.0903374

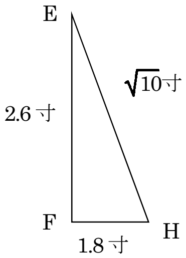
－ 7 －

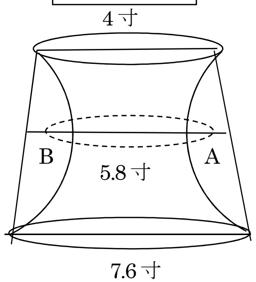
58.0903374×0.52359882＝30.41603211

30.41603211÷3.1623＝9.618325936寸(答)

(解説)







$\frac{\pi}{6}$弦^2×高さ÷(円弧積×π)＝GG'

GG'＝ 弦^2×高さ÷6円弧積＝7.969348658

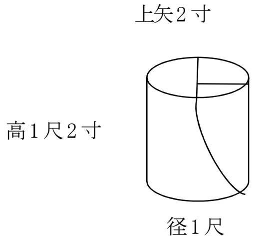
CDの長さは(6+9.6)÷2＝7.8　したがてCG＋DG'＝0.1693448658

中心周の直径は5.630655135

体積は(弧積＝5分4375)×π×5.630655135＝9.618513987寸となる。

問.52

径1尺、高1尺2寸、上矢2寸から右斜めに截る円壔の截積を求めよ。旁離径＝6寸、弦8寸、弧積＝11寸1825、$\frac{\pi}{6}$＝0.52359882とする。



径1尺、高1尺2寸、上矢2寸から右斜めに截る円壔の体積

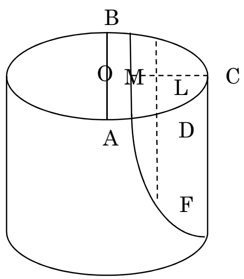
問.52(解法)

体積＝8^3－11.1825×6×6＝109.43寸

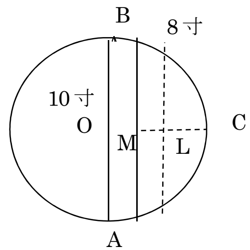
109.43×12÷2÷12＝54.715寸(答)

(参考) 截積＝$\frac{高さ}{12矢}${弦^3－6弧積(径－2矢)}

(解説)



平面図



{$\frac{\pi}{6}$弦^3÷(円弧積×π)－6}÷2＝ML

平面図に示す弦８寸で回転する中心周 ML を求める

ML＝{(弦８)^3÷(円弧積 11.1825)×６－(弦までの長さ６)}÷２＝0.815485505

ここで比をとる２： 12＝0.815485505 ： DF(中心径からの高さ)

DF＝4.89291303

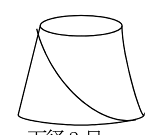
体積は 4.89291303×(弧積 11.1825)＝54.7145

問53

上径１尺、下径２尺、上径左旁から下径右旁に斜めに截る円台の截積を求めよ。

截面濶(截面の幅すなわち切り口)＝1 尺 4 寸 1421、弦 8 寸、弧積＝11 寸 1825、

$\frac{\pi}{6}$＝0.52359882 とする。



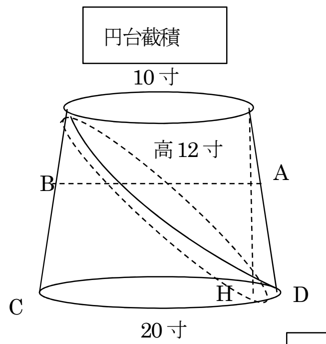
上径１尺、下径２尺、高さ 12 寸、上径左旁から下径右旁に斜めに截る円台の截積

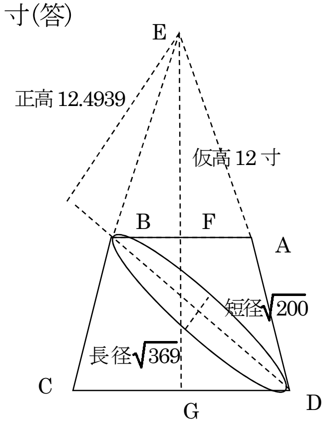
問 53. (解法)

(20×14.1421－10^2)×10＝1828.42 寸

体積＝1828.42×12×0.7854÷30＝574.416427 寸(答)

(解説)





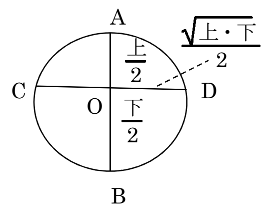
BD＝$\sqrt{15^2+12^2}$ ＝19.209(長径)

仮高(虚円錘高)＝$\frac{上・台高}{上}$＝12 寸、

長径(截面長)＝$\sqrt{15^2+12^2}$ ＝19.209、

短径(中濶)＝$\sqrt{上×下}$ ＝$\sqrt{10×20}$ 、

短径はこのように考えたか



側円錘正高＝$\frac{上・下・台高}{上・截面長}$

＝12.49390095 寸

側円錘積(虚実共積)＝側円錘正高×短径(中濶)×長径(截面長)×$\frac{\pi}{4}$ ÷3

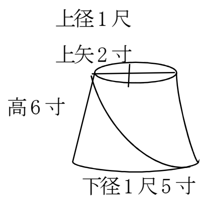
＝12.49390095×$\sqrt{200}$×$\sqrt{369}$×$\frac{\pi}{4}$ ÷3＝888.5763343 寸

虚円錘積＝上^2×正高×$\frac{\pi}{4}$ ÷3＝314.1592 寸

側円錘積(虚実共積)－虚円錘積＝888.5763343－314.1592＝574.4171343 寸

問.54

上径１尺、下径１尺５寸、高６寸、上矢２寸から下径右旁に斜めに截る円台の截積　截面長＝7 寸 5 分、、側円闕積=46 寸 3104、$\frac{\pi}{6}$=0.52359882 とする。



上径１尺、下径１尺５寸、高６寸、上矢２寸から下径右旁に斜めに截る円台の截積

問. 54(解法)

46.3104×15×2＝1389.312 寸

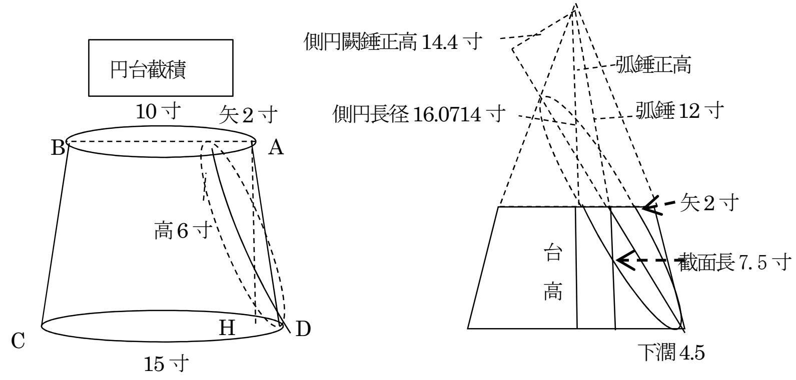
11.1825×10×7.5＝838.6875 寸　(1389.312－838.6875)×6＝3303.747(実)

体積=3303.747÷{(15−10)×7.5×3}＝29.36664 寸(答)

(解説)

{(側円闕積)×(下径)×(上矢)＝(46.3104×15×2＝1389.312 寸)

－(上弧積)×(上径)×(截面長)＝11.1825×10×7.5=838.6875 寸}×高 6 寸÷3(下径－上径)×(截面長)(3303.747÷{(15−10)×7.5×3}}＝29.36664 寸



上径を上、下径を下、台高を高、側円長径を長、側円短径を短とする。

仮高(虚弧錘高)＝$\frac{\text{上・高}}{\text{下－上}}$=12 寸、下濶＝(下－上)÷2＋矢=4.5 寸、

截面長=$\sqrt{\text{下濶}^2+\text{高}^2}$=7.5 寸、

側円長径=$\frac{\text{下・截面長}}{\text{下濶＋(下－上)÷2}}=\frac{15\cdot 7.5}{4.5+2.5}$=16.07142857 寸

側円短径=$\sqrt{\frac{\text{下}^2\text{・矢}}{\text{下濶＋(下－上)÷2}}}=\sqrt{\frac{450}{7}}$=8.017837257 寸

側円闕錘正高=$\frac{\text{下・矢・高}}{\text{截面長×(下－上)}}=\frac{180}{37.5}$=4.8 寸

仮矢=$\frac{\text{截面長・短}}{\text{長径}}=\frac{60.13377942}{16.07142857}$=3.741657386 寸

短径≒仮円径とする。

弧術より弧積=$\frac{\text{円径×背－(円径－2矢)弦}}{4}$　,

半弦^2=3.741657386×4.276179871=16　だから弦=8寸

背=2円径 $\sin^{-1}\sqrt{\frac{\text{矢}}{\text{円径}}}$ =16.03567451$\sin^{-1}$0.68313005=12.05946756

弧積=$\frac{\text{円径×背−(円径−2矢)弦}}{4}$=$\frac{96.6908483-4.27617988}{4}$=23.1036671

側円闕積=弧積×長径÷短径=46.31036071寸

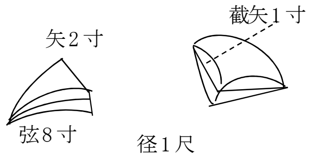
側円闕錘積(虚実共積)=側円闕積×正高÷3=46.31036071×1.6=74.09653771寸

虚弧錘積(虚積)=上弧積×仮高÷3=11.1825×4=44.73寸(注上弧積はすでに問48などで求めている)

截積=側円闕錘積(虚実共積)−虚弧錘積(虚積)=74.09653771−44.73=29.36653771(答)

問.55

矢2寸、弦8寸、右旁截縄、矢1寸の截積球径=1尺、離径=6寸、截面下矢=1寸、截中矢=7分5736、截旁背=1寸419截面両弦=5寸2915、両径=8寸、両背=5寸782、仮背=5寸576、中心矢=3分05、中心背=3寸35、$\frac{\pi}{6}$=0.52359882とする。



矢2寸、弦8寸、右旁截縄、矢1寸の截積

問.55(解法)

(背中矢0.75736+中心矢0.305)×背1.419×100×3.141592=473.5914879寸(実)　(仮背5.576+中心背3.35)×6=53.556寸(法)

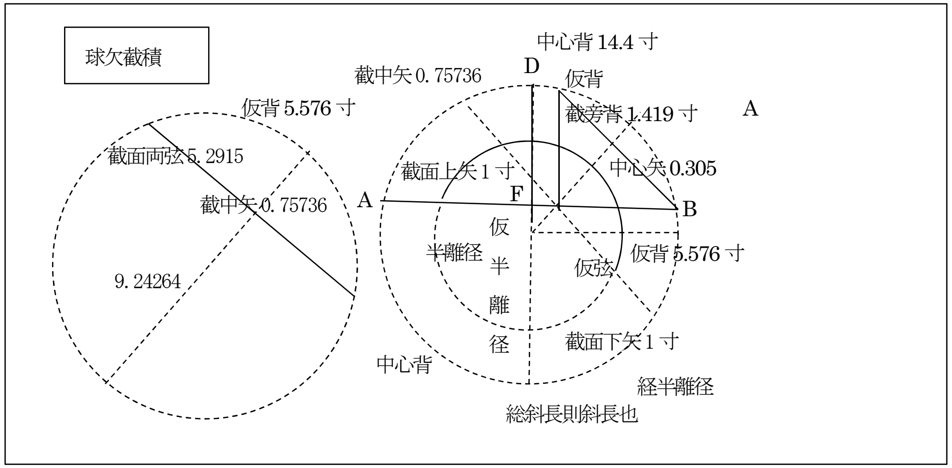
$\frac{\text{(背中矢0.75736+中心矢0.305)背1.419・径}^2\text{・}\pi}{\text{(仮背5.576+中心背3.35)×6}}$=8.842921202

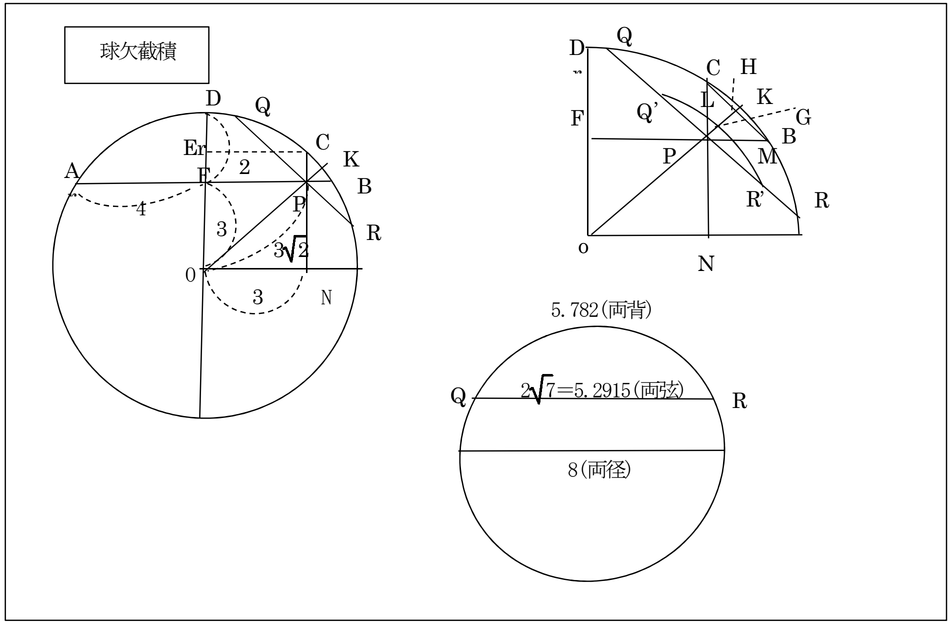
473.5914879÷53.556=8.842921202(寄)

(截面両背5.576−截面両弦5.2915)×両径8=3.924寸

(両弦5.2915×矢1×矢2+3.924)×6÷12=7.2535

8.8429−7.2523=1.5894寸(答)





QRを弦、PKを矢とする仮球闕の表面積は

仮球闕の表面積$=\frac{\pi}{4}(4矢^2+弦^2)=\frac{\pi}{4}(4矢^2+矢径-4矢^2)=\pi径矢$

$=\pi d\cdot PK=10\pi(5-3\sqrt{2})=23.79313961$

また矢PK=0.757359314とd=10を用いて, $\overline{QR}$, $\widehat{QR}$及び弧積QKRを求める。$\overline{QR}$

$=2\sqrt{0.757359314\cdot 9.24264049}=2\sqrt{7}=5.291502622$

$\widehat{QR}=20\sin^{-1}\sqrt{\frac{矢}{円径}}=20\sin^{-1}0.275201618=5.57598708$

弧積QKR$=\frac{d\cdot背-(d-2矢)弦}{4}$

$=\frac{55.7598708-8.48528138\cdot 5.291502622}{4}=2.714979782$

次に弧積QKRの重心をGとすれば

$\frac{\pi\cdot\overline{QR}^3}{6}=2\pi\,\overline{OG}\cdot$弧積QKR

$\overline{OG}=\frac{56\sqrt{7}}{12弧積QKR}=\frac{148.1620734}{32.57975738}=4.547672705$

$PG=\overline{OG}-OP=4.547672705-3\sqrt{2}=0.305032019$

$\widehat{Q'R'}=2\times 9.09534541\sin^{-1}\sqrt{\frac{矢}{円径}}$

$=2\times 9.09534541\sin^{-1}0.183434257=3.350195365$

$PC:OP=PH:PN\quad PH=\frac{PN\cdot PC}{OP}=\frac{3\cdot 1}{3\sqrt{2}}=0.707106781$

$HK=PK-PH=0.757359314-0.707106781=0.050252533$

$\widehat{CB}=20\sin^{-1}0.070889018=1.418970209$

$PG:PK=\widehat{LM}:\widehat{CB}\quad,\ \widehat{LM}=\frac{PG\cdot\widehat{CB}}{PK}$

$=\frac{0.305032019\cdot 1.418970209}{0.757359314}=0.571500658$

$\frac{截冪積}{球闕表面積}=\frac{\widehat{LM}+\widehat{CB}}{\widehat{Q'R'}+\widehat{QR}}$

$=\frac{0.571500658+1.418970209}{3.350195365+5.57598708}=\frac{1.990470867}{8.926182445}=0.222992402$

截冪積$=0.346590533\times 23.79313961$

球闕積$=0.222992402\times 23.79313961\times 5\div 3=8.8428156$

截面弧積$=\dfrac{\text{両径}\times\text{両背}-(\text{両径}-2\text{矢})\text{両弦}}{4}$

$=\dfrac{8\times5.782-(8-2)5.2915}{4}=\dfrac{46.256-31.749}{4}=3.62675$

両面錘高×截面弧積÷3×2=3.62675×2=7.2535

截積=球闕積−7.2535=8.8428156−7.2535=1.5893156(答)

(現代解法)

扇形 ZXW の面積を 3 から 4 まで積分すればこの体積は得られる。

$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{25-x^2}}\qquad\theta=\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{25-x^2}}$

弓形面積 ZXW$=MW^2\theta-3\sqrt{16-x^2}$

$=(25-x^2)\ \cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{25-x^2}}-3\sqrt{16-x^2}$

求める体積を V とすれば

$V=25\int_3^4 \cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{25-x^2}}dx-\int_3^4 x^2\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{25-x^2}}dx-3\int_3^4\sqrt{16-x^2}dx$

※$\int\cos^{-1}x\,dx=x\cos^{-1}x+\int\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+C$ 部分積分より$\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}x=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

だから

$25\int_3^4\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{25-x^2}}dx=25[x]^4_3[\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{25-x^2}}]^4_3$

$+75\int_3^4 x\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{25-x^2}}}\cdot\dfrac{-1}{2}\dfrac{-2x}{\sqrt{25-x^2}(25-x^2)}\ dx$

$25[x]^4_3[\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{25-x^2}}]^4_3=25(4\ \cos^{-1}\dfrac{3}{3}-3\ \cos^{-1}\dfrac{3}{4})=-75\ \cos^{-1}\dfrac{3}{4}$

$75\int_3^4 x\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{25-x^2}}}\cdot\dfrac{-1}{2}\dfrac{-2x}{\sqrt{25-x^2}(25-x^2)}\ dx=75\int_3^4\dfrac{x^2}{\sqrt{16-x^2}(25-x^2)}$

同様にして

※$-\int_3^4 x^2\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{25-x^2}}dx=-[\dfrac{x^3}{3}]^4_3[\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{25-x^2}}]^4_3$

$-\int_3^4\dfrac{x^3}{3}\cdot3x\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}(25-x^2)}dx$

$=9\ \cos^{-1}\dfrac{3}{4}-\int_3^4\dfrac{x^4}{\sqrt{16-x^2}(25-x^2)}dx$

$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\dfrac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\dfrac{x}{a})+C$ より

※$-3\int_3^4\sqrt{16-x^2}dx=\dfrac{-3}{2}[(x\sqrt{16-x^2}+16\sin^{-1}\dfrac{x}{4})]^4_3$

$=\dfrac{-3}{2}[(0+16\dfrac{\pi}{2}-3\sqrt{7}-16\sin^{-1}\dfrac{3}{4})=\dfrac{9}{2}\sqrt{7}+24\ \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$となる。

これらをまとめると

$V=-75\cos^{-1}\dfrac{3}{4}+75\int_3^4 x^2\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}(25-x^2)}dx+9\cos^{-1}\dfrac{3}{4}$

$-\int_3^4 x^4\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}(25-x^2)}dx-12\pi+\dfrac{9}{2}\sqrt{7}+24\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$

$V=-66\cos^{-1}\dfrac{3}{4}-12\pi+\dfrac{9}{2}\sqrt{7}+24\sin^{-1}\dfrac{3}{4}+\int_3^4\dfrac{75x^2-x^4}{\sqrt{16-x^2}(25-x^2)}dx$

※$\int_3^4\dfrac{75x^2-x^4}{\sqrt{16-x^2}(25-x^2)}dx=\int_3^4\dfrac{1250}{\sqrt{16-x^2}(25-x^2)}dx-50\int_3^4\dfrac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

$+\int_3^4\dfrac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$

$\int_3^4\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}(25-x^2)}dx=\dfrac{1}{10}\int_3^4\sqrt{\dfrac{4+x}{4-x}}\cdot\dfrac{1}{4+x}\cdot(\dfrac{1}{5-x}+\dfrac{1}{5+x})dx$

$\sqrt{\dfrac{4+x}{4-x}}=t$ と置く　　$t^2=\dfrac{4+x}{4-x}$　より $t^2(4-x)=4+x$　$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\dfrac{1}{4+x}=\dfrac{1+t^2}{8t^2}$　，$\dfrac{1}{5-x}=\dfrac{1+t^2}{t^2+9}$，$\dfrac{1}{5+x}=\dfrac{1+t^2}{9t^2+1}$，$dx=\dfrac{16t}{(1+t^2)^2}dt$ ， x=4 のとき t は∞ ，x=3 のとき t=$\sqrt{7}$

$$\frac{1}{10}\int_{3}^{4}\sqrt{\frac{4+x}{4-x}}\cdot\frac{1}{4+x}\cdot\left(\frac{1}{5-x}+\frac{1}{5+x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{10}\int_{\sqrt{7}}^{\infty} t\cdot\frac{1+t^2}{8t^2}\cdot\left(\frac{1+t^2}{t^2+9}+\frac{1+t^2}{9t^2+1}\right)\frac{16t}{(1+t^2)^2}dt$$

$$=\frac{1}{5}\int_{\sqrt{7}}^{\infty}\left(\frac{1}{t^2+9}+\frac{1}{9t^2+1}\right)dt$$

$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$ だから

$$=\frac{1}{5}\int_{\sqrt{7}}^{\infty}\left(\frac{1}{t^2+9}+\frac{1}{9t^2+1}\right)dt=\frac{1}{5}\left[\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{t}{3}+\frac{1}{3}\tan^{-1}3t\right]_{\sqrt{7}}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{15}\left(\pi+\tan^{-1}3\sqrt{7}+\tan^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

※$-50\int_{3}^{4}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}=-50\left[\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_3^4=-50\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$

※$\int_{3}^{4}\frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\left[x\sqrt{16-x^2}-16\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_3^4=-\frac{1}{2}\left(-3\sqrt{7}\right.$

$\left.-16\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\right)$

$V=-66\cos^{-1}\frac{3}{4}-12\pi+\frac{9}{2}\sqrt{7}+24\sin^{-1}\frac{3}{4}+\frac{250}{3}\left(\pi+\tan^{-1}3\sqrt{7}+\tan^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3}\right)-50\left(\frac{\pi}{2}-\right.$

$\left.\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(3\sqrt{7}+16\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\right.$

$=-66\cos^{-1}\frac{3}{4}-12\pi+\frac{9}{2}\sqrt{7}+24\sin^{-1}\frac{3}{4}+\frac{250}{3}\left(\pi-\tan^{-1}3\sqrt{7}-\tan^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$

$-25\pi+50\sin^{-1}\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{7}+4\pi-8\sin^{-1}\frac{3}{4}$

$=\frac{151}{3}\pi+6\sqrt{7}+66\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}-\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)-\frac{250}{3}\left(\tan^{-1}3\sqrt{7}+\tan^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$

$=158.1267973+15.87450787+66(0.848061902-0.722734097)$

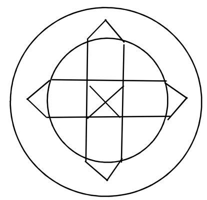
$-\frac{250}{3}(1.445468195+0.722734097)$

体積=158.1267973+15.87450787+8.27163513−180.6835243=1.5894159 となる。

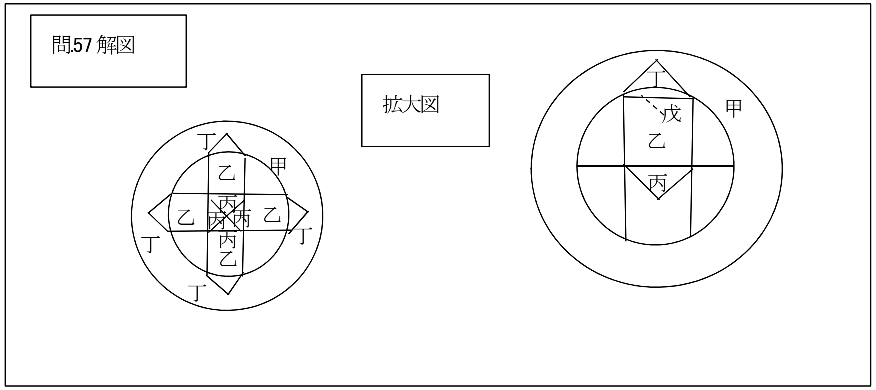
問. 56 解なし

問.57
外径=1 尺、各輪径=1 寸、の十字環の体積はいくらか。

外径=1 尺、各輪径=1 寸、の十字環の体積



問. 57(解法)



小矢＝0. 031373、小背＝1 寸 0026227、小弧積＝0. 0209277 ， $\frac{\pi}{4}$＝0. 7854

(外径 10－内輪径 1) π＝28. 2744

28. 2744＋2(外径 10－内輪径 1)－4 小矢 4×0. 031373
＝28. 2744＋17. 874508
＝46. 148908

46. 148908×$\frac{\pi}{4}$＝36. 2453523432(寄位)

(外径10－2内輪径2－2小矢0. 062746)×小弧積0. 0209277×6＝0. 9966508232148
輪径 ^{3}1－0. 9966508232148＝0. 0033491767852　　　　0. 00334918×1÷3÷小矢 0. 031373＝0. 035584491816
0. 035584491816＋(寄位) 36. 2453523432＝36. 280936835(再寄)
(4 輪径＋2 小背 2. 0052454－4 小矢 0. 125492)×1÷3＝1. 9599178
(再寄)－1. 9599178＝34. 321019035 寸(答)
外径－内径(外輪の中心径)×円周法π(中心周)＝28. 2744
28. 274333882308139146163790449516

輪径 ^{2}×円壔高×円積法$\frac{\pi}{4}$＝$\frac{\pi^2}{4}$d^2(D－d)＝甲積＝22. 20671376

22. 206609902451056892377604749721

{(2 外径－6 輪径－4 小矢}$\frac{\pi}{4}$輪径 ^{2}＝$\frac{\pi}{8}$d^2(D－3d－2c)＝乙積(4 円壔積)

6. 937254×0. 3927＝2. 724259645　　2. 724259645×4＝10. 89703858
c＝0. 031373033403114114247576395411
4 乙＝10. 897012996304225843007243855556

輪半径(円壔高)×$\frac{\pi}{4}$(輪径)^2－輪半径×(輪径)^2÷3＝$\frac{\pi}{4}$d^2×$\frac{d}{2}$－$\frac{1}{6}$d^3＝丙積

＝0. 2260334　　0. 2260334×4＝0. 9041336
4 丙＝0. 904129660128229952564657691639 75

{($\frac{\pi}{8}$－$\frac{1}{6}$)d^3－$\frac{d^2}{6}$×s}4＝丁積　　　s＝1. 0026227

s＝1. 002622649344523174996344535890 8566
2s＝2. 005245298689046349992689071781 6
丁積＝0. 226034－0. 167103783＝0. 058930217
(0. 226032415032057488141230422909 94
－0. 167103774890753862499390755981 8)4
4 丁＝ 0. 235714560565214502567358667712 55
0. 058930217×4＝0. 235720868

$$2D＝\left\{c－\frac{(D－2d)－\frac{d^3}{6A}}{2}\right\}×\frac{d}{2c}×A＝\frac{d}{2}A－\frac{d}{2c}A(D－2d)＋\frac{d^4}{12c}$$

$$2D＝\frac{d}{c}\left\{\frac{d^3}{12}－\frac{A}{2}(D－2d－2c)\right\},\quad 2E＝\frac{d^2c}{3}\quad 戊＝2D＋2E$$

$$4戊積＝\frac{d}{3c}\{d^3－6A(D－2d－2c)\}＋4\frac{d^2c}{3}\qquad 6A＝0.1255662$$

＝10. 62484726(1－0. 99665082)＋0. 04183066＝0. 077415185
6A＝6×0. 020931815390603407116859966483 91
＝0. 125590892343620442701159798903 46
2c＝0. 062746066806228228495152790822
3c＝0. 094119100209342342742729186233
4c＝0. 125492133612456456990305581644

4戊積=10.624835955462514514336556079478(1
−0.99684680422771691598327964273984)
0.03350218781596570231036186547955+0.041830711204152152330101860548
=0.07533289902011785464046372602755
　c小矢=0.031373 , s小背=1寸0026227
甲+4(乙+丙+丁+戊)=22.20671376+10.89703858+0.9041336
+0.235720868+0.077427368=34.32102199
=22.206609902451056892377604749721
+10.897012996304225843007243855556
+0.90412966012822995256465769163975
+0.23571456056521450256735866771255
+0.07533289902011785464046372602755
=34.318800018468845045157328690657(答)
2c=0.062746 ,3c=0.094119 ,4c=0.125492 ,2s=2.0052454

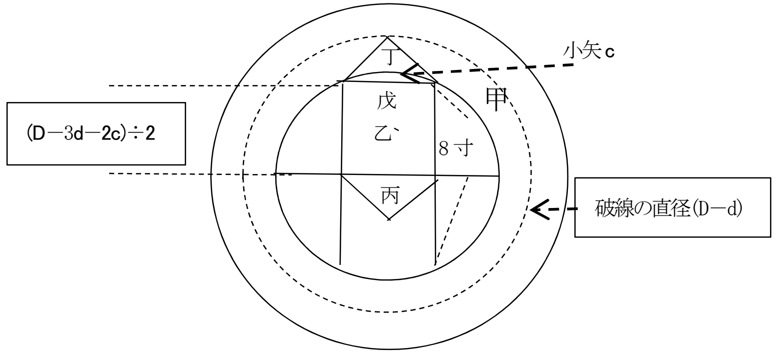
体積V=甲+4(乙+丙+丁+戊)=$\frac{\pi^2}{4}d^2(D-d)+\frac{2\pi}{4}d^2(D-3d-2c)+(\frac{2\pi}{4}-\frac{2}{3})d^3+$

$\{(\frac{2\pi}{4}-\frac{2}{3})d^3-\frac{d^2}{3}\times 2s\}+\frac{d}{3c}\{d^3-6A(D-2d-2c)\}+4\frac{d^2c}{3}$

$=\{(D-d)\pi+2(D-d-2c)\}\frac{\pi}{4}d^2+\{d^3-6A(D-2d-2c)\}d\div 3c-(4d+2s-$

$4c)d^2\div 3$
=(28.2744+17.874508)×0.7854+(1−0.9966508232148)÷3c−1.9599178
=36.2453523432+0.035584491816−1.9599178
=34.321019035寸(答)
(28.274333882308139146163790449516
+17.874507866387543543009694418356)×π÷4
=46.148841748695682689173484867872)×π÷4
=36.245215552345075973847491988557
+0.03350218781596570231036186547959
−1.9599177216921966310007944967125
34.318800018468845045157059357324(答『拾璣算法』)

(解)



小矢をcとすると
$0.5^2=c(8-c)$　　$c^2-8c+0.25=0$　　c=0.031373

$c=4-\sqrt{15.75}=4-3.9686269665968858857524236304589$

=0.031373033403114114247575763695411(『拾璣算法』は・・7636まで)
背をs、直径をdとすると

$s=2\sqrt{cd}\{1+\frac{1}{2\cdot3}(\frac{c}{d})+\frac{3^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5}(\frac{c}{d})^2+\frac{3^25^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}(\frac{c}{d})^3+\cdots\}$

$\sqrt{cd}=0.500983033$　　1寸0026227

s=1.001966066{1+0.000653605+0.000001153+0.000000002+・・}
c=0.031373　d=8

=1.002622113　　$s=2d\sin^{-1}\sqrt{\frac{c}{d}}=1.002621265$

31.8745418(0.16666−0.020915726(7.937254)+0.01045766)×4 s＝1.00262226493445231749965358908566(『拾璣算法』)

A 弧積＝{d×s－(d－2c)弦}÷4＝{8.0209816－(7.937254)}÷4＝0.0209319

A＝0.02093181539060340711685996648391(『拾璣算法』)

外輪の直径＝D, 各輪の直径＝d, 小矢＝c, 背＝s ,弧積＝A とする。

A＝0.0209277

d＝8, $c=\frac{d}{2}(1-\cos\frac{s}{d})=4(1-\cos 0.125327837)=0.03137049$

甲の体積＝$\frac{\pi^2}{4}d^2(D-d)=\frac{\pi^2}{4}\times 9=22.20660065$

＝22.206609902451056892377604749721(パソコン電卓による)

$(\frac{\pi}{4}d^2\times(D-d)\pi$ すなわち甲の球環体は円の面積×中心周としている)

乙の体積＝$\frac{\pi}{8}d^2(D-3d-2c)=\frac{\pi}{8}\times 6.937254=2.724252707$

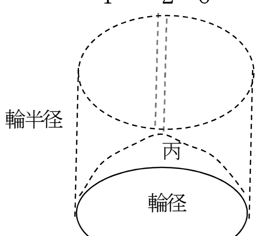
＝2.7242532490760564607518109842071(パソコン電卓による)

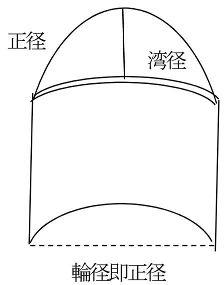
$(\frac{\pi}{4}d^2\times\frac{1}{4}(D-d-2c)$ を乙１個の球環体としている)

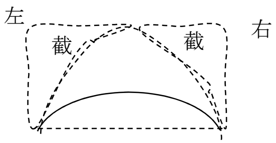
4 乙＝10.897010822

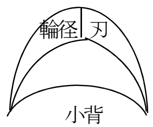
＝10.897012996304225843007243936829(パソコン電卓による)

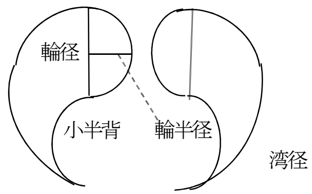
丙の体積＝$\frac{\pi}{4}d^2\times\frac{d}{2}-\frac{1}{6}d^3=0.22603234$(高さ$\frac{d}{2}$の円柱の体積－舌を切った体積)

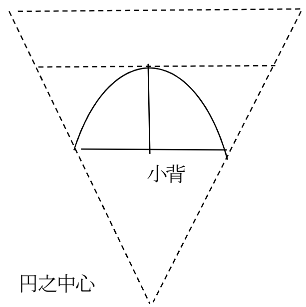


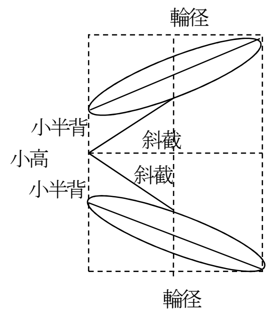










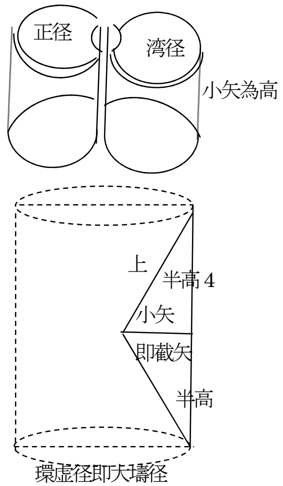


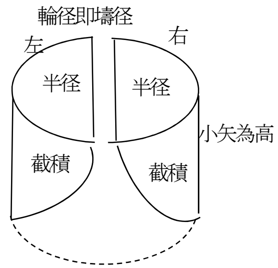
※丙輪径を円壔の径と見なし、輪の半径を高さと見なす。径の半径に従って左右斜めにこれを截る。すなわち丙一か所の之は形である。ゆえに輪径の自乗に輪半径を掛け、円積法を掛けば円壔の体積(虚実共積)を得る。

輪径自乗に輪半径を掛け之を３で割れば、斜截左右共積(虚積)を得る。これを円壔積から引けば丙一か所積(実積)を得これを４倍すれば丙総積となる。

丙の総体積$=4(\frac{\pi}{4}$輪径$^2\times$輪半径$-$輪径$^2\times$半輪径$\times\frac{1}{3})$輪径を d とすれば

$=(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})d^3$ となる。





※輪径冪に小背を掛け之を 6 で割ると回截(虚積)を得る。これを刃壔から引けば

丁 1 か所の体積(丙 1 か所の体積$-\frac{d^2}{6}\times$小背)が求まる。これを 4 倍して丁総積が求まる。小背を s とすると

4 丁の体積$=$総丙積$-\frac{2sd^2}{3}=\{(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})d^3-\frac{2sd^2}{3}$

※輪径をもって上の正径(又は下の正径)をなし、小背をもって上の湾径、小矢、截矢をもって半高とする。上下斜截これ即ち戊上形を為す。故に輪径 3 乗を 6 小

弧積で割ると中心径を得る。これより環虚径すなわち大壔径から中心径を引いて半分したものを小矢から引いた余りを中矢と見なす。中矢に輪径(円柱の高さ)を掛けて、小矢で割れば中心高が求まる。中心高と小弧積を掛けて、大円柱の半高に従って上下切り取った体積が得られる(戊の上積)

小弧積を A とすると$\frac{d^3}{6A}=$中心径、中矢$=c-\frac{D-d}{2}$

中心矢$\times\frac{d}{2c}=$中心高

上戊積$=$截積$\times 2=2A\times$中心高$=2A\times\{\frac{d^3}{6A}-(D-2d-2c)\}\times\frac{d}{2c}$

$=\frac{d}{12c}\{d^3-6A(D-2d-2c)\}$

輪径(小壔径)冪掛け小矢(小壔高)を 3 で割ると小壔半径左右截之下戊積

上下戊積を合わせて 4 倍すると総戊積

総戊積$=4[\frac{d}{2c}\{\frac{d^3}{6}-A(D-2d-2c)\}+\frac{d^2c}{3}]$

△ABC において $BC=\sqrt{r^2-x^2}$，$AB=BC$ だから

△ABCの面積Sは$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}(r^2-x^2)$

従って切断面積は$\int_0^r (r^2-x^2)\,dx=r^3-\frac{1}{3}r^3=\frac{2}{3}r^3=\frac{1}{12}d^3$となる。

又は四角形で考えて$\int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$を解く　$r^2-x^2=t$と置いて$-2xdx=dt$

$\int_0^{r^2} t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{3}\left[\ t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{r2}\ =\frac{2}{3}r^3$としてもよい。

4丙の体積$=(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})d^3=1.570796-0.666666$

4丙$=0.90412936$

$=0.9041296601282299525646550316397 5$(パソコン電卓による)

丁の体積＝丙の体積$=\frac{\pi}{8}d^3-\frac{1}{6}d^3-\frac{d^2}{6}\times$小背だから

4丁の体積$=\{(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{6})d^3-\frac{d^2}{6}\times s\}4$　　　$s=1.002622113$

$=(0.2260324-0.167103685)\times 4$

$=0.23571486$

$=(0.2260324150320574881411644229099 4$

$-0.1671037748907538624994226484761)4$

$=0.2357145605652145025669672916397 6$(パソコン電卓による。)

甲+4(乙+丙+丁)　0.07741474

$=34.24346711944872719051647100983$

$=34.32088185944872719051647100983$

34.32092385寸(答)　　34.321019035

弧の高さsをn等分し、弦に平行線を引き、その部分積をa,b,c,・・・とすれば

$A=a+b+c+\cdots\cdots$

$D=A\frac{r}{n}+(A-a)\frac{r}{n}+(A-a-b)\frac{r}{n}+(A-a-b-c)\frac{r}{n}+\cdots\cdots$

$=Ar-\{a(n-1)+b(n-2)+c(n-3)+\cdots\cdots\}\frac{r}{n}$

$=(a+3b+5c+\cdots\cdots)\frac{r}{2n}+(a+b+c+\cdots\cdots)\frac{r}{2n}$

$=(a\frac{s}{2n}+\frac{3s}{2n}b+\frac{5s}{2n}c+\cdots\cdots)\frac{r}{s}+A\frac{r}{2n}$

極限にて

$=A$(円矢の重心と弦との距離)　$\frac{r}{s}$　　$\frac{d^3}{6A}-(D-2d-2c)=$中心矢

中心矢$\times\frac{d}{2c}=$中心高　　　　截積×2＝2A×中心高

$D=\{c-\frac{(D-2d)-\frac{d^3}{6A}}{2}\}\times\frac{d}{2c}\times A$

$=\frac{d}{2}A-\frac{d}{c}A(D-2d)+\frac{d^4}{6c}=\frac{d}{c}\{\frac{d^3}{6}-A(D-2d-2c)\}$

$2E=\frac{d^2c}{3}$

戊$=2D+2E=\frac{d}{2c}\{\frac{d^3}{6}-A(D-2d-2c)\}+\frac{d^2c}{3}$

$=15.9372709(0.16666-0.0209277\ (7.937254)+0.01045766)$

$=0.019352729$

4戊の体積$=[\frac{d}{c}\{\frac{d^3}{6}-A(D-2d-2c)\}+\frac{cd^2}{3}]\times 4=0.077410916$

矢$c=0.031373$　，背$=1.0026227$　弦1　$A=0.0209277$

A 弧積＝{円径×背－(円径－2 矢)弦}÷4＝(8×1.0026227－7.937254)÷4＝0.0209319

(8.0209816－0.937254)÷4＝0.0209319

$[\frac{d}{c}\{\frac{d^3}{6}-A(D-2d-2c)\}+\frac{cd^2}{3}]\times 4$

$=31.8745418(0.16666-0.0209277(7.937254)+0.01045766)\times 4$

$=(31.8745418\times 0.00055819+0.01045766)\times 4=0.0711682$

0.019364185　　0.008906525　　　0.0209277

$=(0.020821438+0.01045766)\times 4=0.12236865$

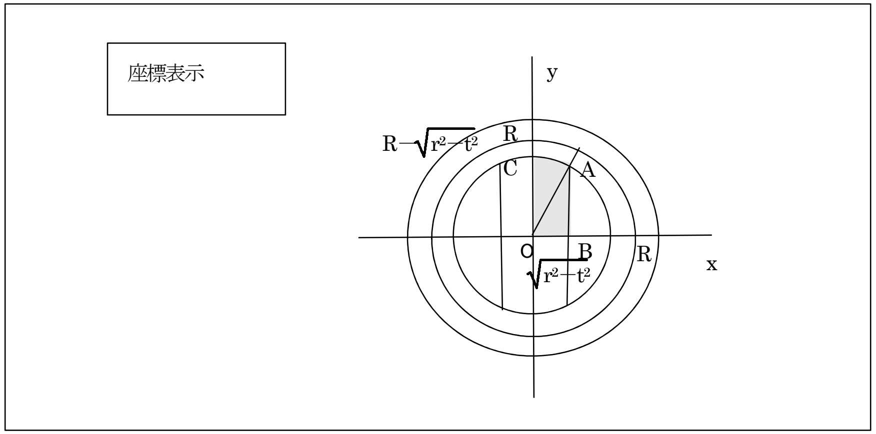
十字環の体積＝甲＋4(乙＋丙＋丁＋戊)

$=\frac{\pi^2}{4}d^2(D-d)+4\{\frac{\pi}{4}d^2\times\frac{1}{4}(D-d-2c)+(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})d^3+(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{6})d^3-\frac{d^2}{6}\times$

$s+\frac{d}{c}\{\frac{d^3}{6}-A(D-2d-c)\}+\frac{cd^2}{3}\}$

$=\{(D-d)\pi+(D-d-2c)\}\frac{\pi}{4}d^2+(\frac{5\pi}{2}-\frac{10}{3})d^3-\frac{2d^2}{3}\times s+4\frac{d}{c}\{\frac{d^3}{6}-A(D$

$-2d-c)\}+\frac{4cd^2}{3}\}$　c＝0.031373,　s＝1.002622113　A＝小弧積 0.0209277



甲の体積 $V_1=\pi r^2\times 2\pi R=2\pi^2 r^2 R=22.2066099024510568923776047497 21$

平面 Z＝t(0≦t≦r)で切った断面は図のようになるから $OB=\sqrt{r^2-t^2}$,$OA=OC=R$

$-\sqrt{r^2-t^2}$,$AB=\sqrt{OA^2-OB^2}=\sqrt{R^2-2R\sqrt{r^2-t^2}}$

$\angle AOC=\angle OAB=\sin^{-1}\frac{\sqrt{r^2-t^2}}{R-\sqrt{r^2-t^2}}$ よって

$=\{9\pi+(9-2c)\}\frac{\pi}{4}+(\frac{5\pi}{2}-\frac{10}{3})-\frac{2}{3}\times s+4\frac{1}{c}\{\frac{1}{6}-A(8-c)\}+\frac{4c}{3}\}$

$=(28.274328+8.937254)0.785398+(7.85398-3.333)-0.668414742+127.4981672\{0.166666-0.166765035\}+0.04183066$

十字環の体積＝甲＋4(乙＋丙＋丁＋戊)＝34.34568259 寸(答)

$=22.20660065+4(2.724252707+0.22603234$

$+0.058928715+0.019352729)=34.32086661$

(現代解法)

$\triangle AOB=\frac{1}{2}OB\cdot AB=\frac{1}{2}\sqrt{r^2-t^2}\cdot\sqrt{R^2-2R\sqrt{r^2-t^2}}$

扇形 $AOC=\frac{1}{2}(R-\sqrt{r^2-t^2})^2\sin^{-1}\frac{\sqrt{r^2-t^2}}{R-\sqrt{r^2-t^2}}$

$V_2=8\{\int_0^1\frac{1}{2}(9-\sqrt{1-t^2})^2\sin^{-1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{9-\sqrt{1-t^2}}dt+\int_0^1\frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\cdot$

$\sqrt{81-18\sqrt{1-t^2}}\ dt\}$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}(9-\sqrt{1-t^2})^2\sin^{-1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{9-\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\cdot\sqrt{81-18\sqrt{1-t^2}}\ dt$$

『求積通考』

V＝9(2.467401100272339654708622749969
＋1.5707963267948966192313216916398
－0.2222222222222222－0.00242406840554767996794957051179
2.4386526444139612863892699283646e-4
＝34.321960227955217345747953839873

（参考）

『参両録』榎並和澄著 1653 の遺題に「方円卵」として始まり、正確な値は幕末の和田寧の円理割術が発明されるまで得られなかった。

書　　名	著者・年代	外径・各輪径	答	答(外径 8,輪径2)
『参両録』	榎並和澄著・(承応 2) 1653	外周 36,内周 4.8	解なし	解なし
『改算記』	山田正重・(万治 2) 1659	外周 36,内周 4.8	87.3275	
『求積』	関孝和・不詳	外径 10,輪径 1	34.321019035	
『算法至源記』	前田憲舒・(延宝 1) 1673	外周 36,内周 4.8	85.1039679	
『拾璣算法』	有馬頼徸・(明和 3) 1766	外径 10,輪径 1	34.318800018	79.8933 歩
『十字環真術』	安島直円・(寛政 6) 1794	外径 10,輪径 1	34.319651449	82.1064 歩
『算法点竄指南録』	坂部広胖・(文化 7) 1810	外径 10,輪径 1	34.2584217557	81.9668 歩
『十字環正解』	竹内武信，小林(文政 8) 1825	不詳		
『五明算法後集』	家崎善之・(文政 9) 1826	外径 8,輪径 2	80.4379	80.4379
『算法求積通考』	内田久命・(弘化 1) 1844	例題なし		
『携帽算法』	堀池久道子(天保 7) 1836	例題なし		

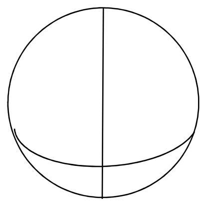
『和算の花』中村信弥著平成 9 年教育書館・『研究紀要』1999 東大寺学園中・高等学校小寺裕著十字環問題によると外径 D,輪径 d とすると

$$十字環の体積=d^2(D-d)\{\pi\cdot\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{4}-2(\frac{d}{D-d})-\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{2\cdot3}{4}(\frac{d}{D-d})^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{4\cdot4}{15}(\frac{d}{D-d})^3-\cdot\cdot\cdot\cdot\}$$

これで計算すると体積＝34.31975328 だが正確には 34.319468072 となる。

問.58
径１尺の球の表面積はいくらか。

径１尺の球の表面積

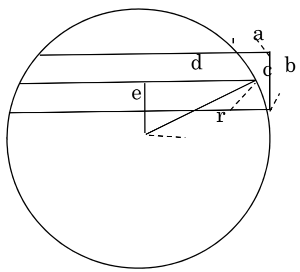


問. 58（解法）

体積$=10^2\times355\div113=314\frac{18}{113}$寸（答）

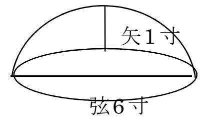
球の表面積$=\frac{3\times\text{球の体積}}{\text{球の半径}}=\text{直径}^2\pi$

（注：永松祥一郎著『古原敏之・之剛文書の数学史研究』p. 32 では
球を微小さな厚さに切断してｃは円周の微小部分である。
$c:b=r:d$ より $cd=rb$ さらに $2\pi cd=2\pi rb$
これを集めて全球表面積Ｓにする。
$S=2\pi r\Sigma b=2\pi rD=\pi D^2$
球全体の体積Ｖは高さをｒとして円錐の集まりと考え
$V=\frac{1}{3}Sr=\frac{1}{6}\pi D^3$ としている。



問.59
矢１寸、弦６寸の球欠の表面積はいくらか。

矢１寸、弦６寸の球欠の表面積

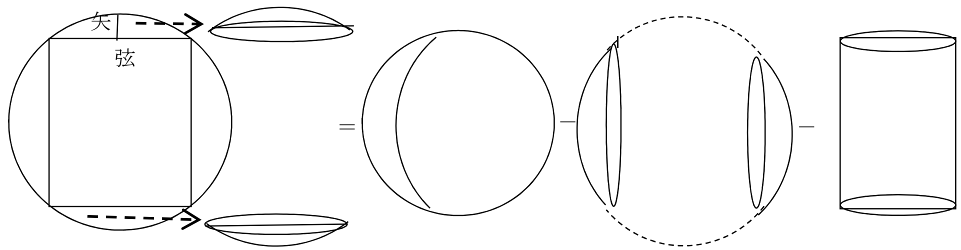


問. 59（解法）

体積$=(1\times4+\text{弦}^2 36)\times355\div(4\times113)=31\frac{47}{113}$寸（答）

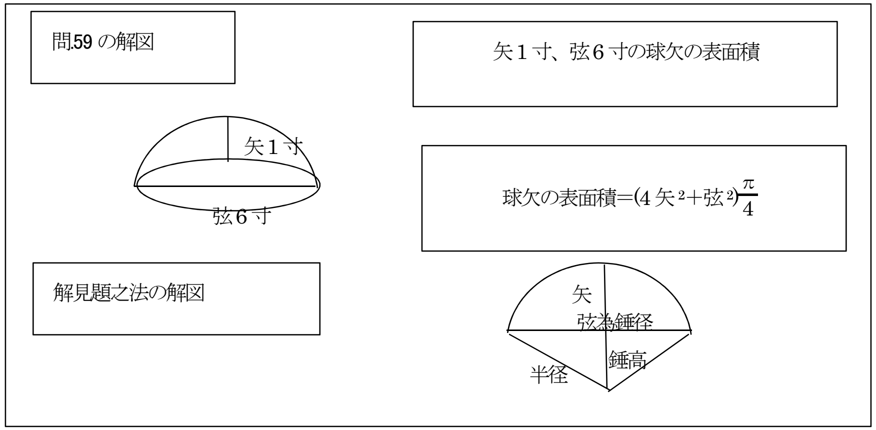
球欠の表面積$=\frac{(4\text{矢}^2+\text{弦}^2)\pi}{4}$

（解説）



球欠積＝（求積－旁円積－円柱積）÷2

$=(\frac{3}{2}\times\frac{\text{弦}^2}{4}\times\frac{\text{矢}}{3}+\frac{\text{矢}^3}{6})\pi=(\frac{3}{2}\times\text{弦円錐}+\text{矢球})\pi$



球欠積＝(求積－旁円積－円柱積)÷2　　　直径d, 弦a, 矢cとする。

$$=\left\{\frac{d^3}{6}-\frac{(d-2c)^3}{6}-\frac{a^2}{4}(d-2c)\right\}\pi\div 2 \qquad a^2=4cd-4c^2 \qquad d=\frac{a^2+4c^2}{4c}$$

$\frac{a^2}{4c}=x$ と置くと $d=x+c$ ，$d-2c=x-c$　上に代入すると

$$球欠積=\left\{\frac{d^3}{6}-\frac{(d-2c)^3}{6}-\frac{a^2}{4}(d-2c)\right\}\pi\div 2$$

$$=\left\{\frac{(x+c)^3}{6}-\frac{(x-c)^3}{6}-\frac{a^2}{4}(x-c)\right\}\pi\div 2$$

$$=\left\{\frac{1}{6}(6x^2c+2c^3)-\frac{a^2}{4}(x-c)\right\}\pi\div 2$$

$$=\left(\frac{a^4}{16c}+\frac{2c^3}{6}-\frac{a^4}{16c}+\frac{a^2c}{4}\right)\pi\div 2$$

$$=\left(\frac{c^3}{6}+\frac{a^2c}{8}\right)\pi$$

$$=\left(\frac{3}{2}\times\frac{弦^2}{4}\times\frac{矢}{3}+\frac{矢^3}{6}\right)\pi$$

特に半球の場合は弦＝d,　矢＝$\frac{d}{2}$だから半球積＝$\left(\frac{3}{2}\times\frac{d^2}{4}\times\frac{d}{6}+\frac{d^3}{48}\right)\pi=\left(\frac{d^3}{16}+\frac{d^3}{48}\right)\pi$

＝$\frac{d^3}{12}\pi$となる。