富 松 神 社（大 村 市 ）の 算 額　問　題　の　現　代　解　法

富松神社
〒856-0031
　長崎県大村市三城町 1274 番地
　電話 0957-52-2217
　宮司　久田松　和則

問い合わせ先
〒856-0827
大村市水主町 1-978-90
米光　丁
電話 0957-54-4507
E-mail　hinotoyonemitsu@hotmail.com
URL　http://hyonemitsu.web.fc2.com

富松神社の第１問の問題と現代解法

渡辺一郎忠眞撰「算法 37 問起源集」による。

今図のように大中小三円が接する隙間に六つの円が接して内接している。大円の直径、中円の直径、小円の直径がわかっている時、子円の直径はどのようにして求めるか。

答え左の如し。

術大円径と中円径を掛けて小円径を除するこれを乾と名づける。乾に大円径と中円径の和を掛けて坤と名づける。坤に乾と小円径を掛けたものを加えて平方し之を倍し、坤を倍したものを加え更に 3 を加えたもので小円径を除すると子円径を得合問。

（解法）

「九円変換術矩合集」の p.5 の式

$4甲^2乙^2壬^2+4甲^2壬^2己^2-4甲壬乙^2己^2-4甲乙壬^2己^2$

$-4甲^2乙壬^2己-4甲^2壬乙^2己-6甲乙^2壬^2己-8甲^2乙壬己^2+9乙^2壬^2己^2+甲^2乙^2壬^2=0$

より$乙^2壬^2$で両辺を割る。

$$4\frac{甲^2乙^2己^2}{乙^2壬^2}+4\frac{甲^2壬^2己^2}{乙^2壬^2}-4\frac{甲乙己^2}{乙壬}-4\frac{甲壬己^2}{乙壬}-4\frac{甲^2壬己}{乙壬}-4\frac{甲^2乙己}{乙壬}-6甲己-8\frac{甲^2己^2}{乙壬}+9己^2+甲^2=0$$

己を得る式を$甲^2$, 甲を省略して

$$1-\left(6+\frac{4甲(乙+壬)}{乙壬}\right)己+\left(9+4\frac{甲^2}{壬^2}+4\frac{甲^2}{乙^2}-8\frac{甲^2}{乙壬}-4\frac{甲壬}{乙壬}-4\frac{甲乙}{乙壬}\right)己^2=0$$

$c+bx+ax^2=0$ $(ax^2+bx+c=0)$ と考えるとこれは二次方程式の解の公式で

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2ac}$ より$\sqrt{b^2-4ac}+b$ を分母子に掛けて分子の有理化する±は−をとる。

$x=\dfrac{4ac}{2a(\sqrt{b^2-4ac}+b)}$　　　　$x=\dfrac{c}{\left(\sqrt{\dfrac{b^2}{4}-ac}+\dfrac{b}{2}\right)}$としている。すなわち実＋法 x＋廉 $x^2=0$ として

$x=\dfrac{実}{\left(\sqrt{\dfrac{法^2}{4}-実・廉}+\dfrac{法}{2}\right)}$だから法＝b ， 実＝c ，　廉＝a　とすると

$\dfrac{乙}{甲}$の式は$\dfrac{法^2}{4}-実廉$, 法$=6+\dfrac{4甲(乙+壬)}{乙壬}$,　実＝1, 廉$=9+4\dfrac{甲^2}{壬^2}+4\dfrac{甲^2}{乙^2}-8\dfrac{甲^2}{乙壬}-4\dfrac{甲壬}{乙壬}-4\dfrac{甲乙}{乙壬}$

$$\frac{法^2}{4}-実廉=\left\{3+\frac{2甲(乙+壬)}{乙壬}\right\}^2-\left(9+4\frac{甲^2}{壬^2}+4\frac{甲^2}{乙^2}-8\frac{甲^2}{乙壬}-4\frac{甲壬}{乙壬}-4\frac{甲乙}{乙壬}\right)$$

$$=9+\frac{12甲(乙+壬)}{乙壬}+\frac{4甲^2(乙+壬)^2}{乙^2壬^2}-\left(9+4\frac{甲^2}{壬^2}+4\frac{甲^2}{乙^2}-8\frac{甲^2}{乙壬}-4\frac{甲壬}{乙壬}-4\frac{甲乙}{乙壬}\right)$$

$=16\left\{\dfrac{甲^2}{乙壬}+\dfrac{甲(乙+壬)}{乙壬}\right\}$　　　乾$=\dfrac{甲}{乙壬}$ ， 坤＝乾(壬＋乙) ， 天＝乾甲＋坤とすると

$16\left(\dfrac{甲^2}{乙壬}+\dfrac{甲(乙+壬)}{乙壬}\right)=16乾甲+16坤=16天$　　　平方に開いて法を半分して加える。

$地=4\sqrt{天}+2坤+3$　　　　$己=\dfrac{甲}{地}$ ，$己=\dfrac{甲}{4\sqrt{\dfrac{甲^2}{乙壬}+\dfrac{甲(乙+壬)}{乙壬}}+2\dfrac{甲(乙+壬)}{乙壬}+3}$

$己=\dfrac{甲}{4\sqrt{乾甲+坤}+2坤+3}$　　　　これと同様にして甲＝小,　壬＝大,　乙＝中とすれば

$子=\dfrac{小}{4\sqrt{\dfrac{小^2}{大中}+\dfrac{小(大+中)}{大中}}+2\dfrac{小(大+中)}{大中}+3}$　　　　$子=\dfrac{小}{4\sqrt{乾小+坤}+2坤+3}$

術文は

$子=\dfrac{小}{2\sqrt{乾小+坤}+2坤+3}$としているが 4 倍の誤りである。

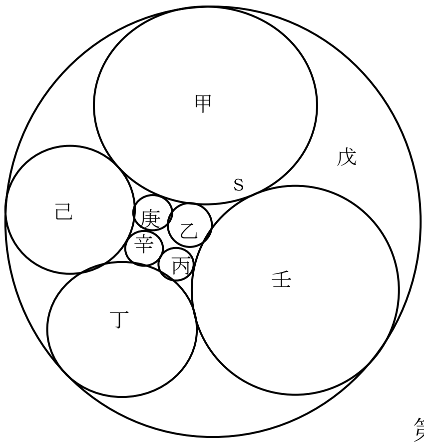
2. 九圓変換術矩合集について

渡辺一郎忠眞撰「算法 37 問起源集」に示された、わずか 5 ページの「九圓変換術矩合集」。

(1)九円変換術前矩合について

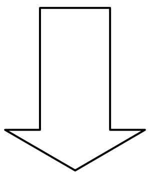
現代の反転法による解法　九円変換術は前・後という 2 つを示しているが 1 つだけ考える。

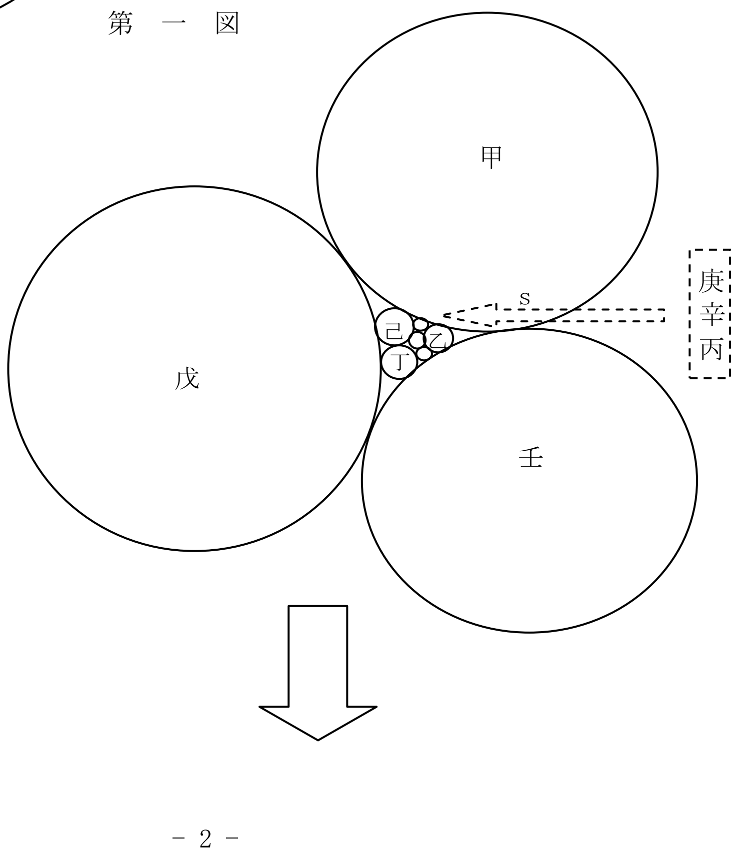
原　　図



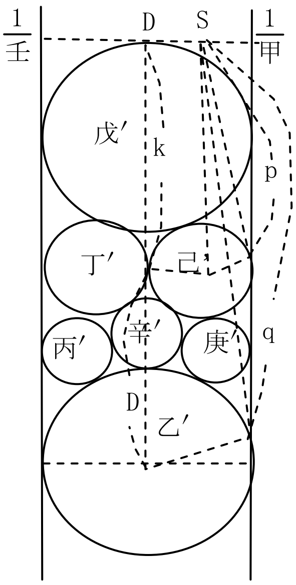
原図は次ぎの原文 p.2 のように変換すると

第　一　図





原文 原図己円変形之図をｓを中心にして反転する



第１図のｓを中心とした反転図

第一図をｓについて反転すると

$D=\frac{1}{\text{甲}}+\frac{1}{\text{壬}}$ 反転の中心をＳとする。反転した円はダッシュをつける。

$S=\frac{D}{2}-\frac{1}{\text{甲}}$

Ｄから己′円と丁′円の接点までの距離をＫとする。

Ｓから己′円の接点までの距離をＰとする。

$$P^2=K^2+\left(\frac{D}{4}-S\right)^2-\left(\frac{D}{4}\right)^2$$

$$=K^2-\frac{DS}{2}+S^2$$

$$=K^2-\frac{D}{2}\left(\frac{D}{2}-\frac{1}{\text{甲}}\right)+\left(\frac{D}{2}-\frac{1}{\text{甲}}\right)^2=K^2-\frac{D^2}{4}+\frac{D}{2\text{甲}}+\left(\frac{D^2}{4}-\frac{D}{\text{甲}}+\frac{1}{\text{甲}^2}\right)$$

$=K^2-\frac{D}{2\text{甲}}+\frac{1}{\text{甲}^2}$　　$P^2=\frac{D}{2\text{己}}$（反転法の法則より）だから　$K^2=\frac{D}{2\text{己}}+\frac{D}{2\text{甲}}-\frac{1}{\text{甲}^2}$

乙’円までの接線をｑとすると $q^2=(K+D)^2+\left(\frac{D}{2}-\frac{1}{\text{甲}}\right)^2+\left(\frac{D}{2}\right)^2$

q^2についても反転法の法則より　$q^2=\frac{D}{\text{乙}}$　だから　$\frac{D}{\text{乙}}=K^2+2KD+D^2-\frac{D}{\text{甲}}+\frac{1}{\text{甲}^2}$

$$=\frac{D}{2\text{己}}+\frac{D}{2\text{甲}}-\frac{1}{\text{甲}^2}+2KD+D^2-\frac{D}{\text{甲}}+\frac{1}{\text{甲}^2}$$

$\frac{D}{\text{乙}}=\frac{D}{2\text{己}}-\frac{D}{2\text{甲}}+2KD+D^2$　　　$\frac{1}{\text{乙}}=\frac{1}{2\text{己}}-\frac{1}{2\text{甲}}+2K+D$

$2K=\frac{1}{\text{乙}}-\frac{1}{2\text{己}}+\frac{1}{2\text{甲}}+2K-D$　　$4K^2=(2k)^2$ だから　$4\left(\frac{D}{2\text{己}}+\frac{D}{2\text{甲}}-\frac{1}{\text{甲}^2}\right)=\left(\frac{1}{\text{乙}}-\frac{1}{2\text{己}}-\frac{1}{2\text{甲}}-\frac{1}{\text{壬}}\right)^2$

$$\frac{2}{\text{己}}\left(\frac{1}{\text{甲}}+\frac{1}{\text{壬}}\right)+\frac{2}{\text{甲}}\left(\frac{1}{\text{甲}}+\frac{1}{\text{壬}}\right)-\frac{4}{\text{甲}^2}=\frac{1}{\text{乙}^2}+\frac{1}{4\text{己}^2}+\frac{1}{4\text{甲}^2}+\frac{1}{\text{壬}^2}-\frac{1}{\text{乙己}}+\frac{1}{2\text{甲己}}+\frac{1}{\text{甲壬}}-\frac{2}{\text{乙壬}}+\frac{1}{\text{己壬}}-\frac{1}{\text{甲乙}}$$

$$\frac{2}{\text{甲己}}+\frac{2}{\text{己壬}}+\frac{2}{\text{甲}^2}+\frac{2}{\text{甲壬}}-\frac{4}{\text{甲}^2}=\frac{1}{\text{乙}^2}+\frac{1}{4\text{己}^2}+\frac{1}{4\text{甲}^2}+\frac{1}{\text{壬}^2}-\frac{1}{\text{乙己}}+\frac{1}{2\text{甲己}}+\frac{1}{\text{甲壬}}-\frac{2}{\text{乙壬}}+\frac{1}{\text{己壬}}-\frac{1}{\text{甲乙}}$$

$$\frac{1}{\text{壬}^2}+\frac{1}{\text{乙}^2}+\frac{1}{\text{甲壬}}-\frac{2}{\text{甲壬}}-\frac{1}{\text{甲乙}}-\frac{1}{\text{乙己}}+\frac{1}{\text{己壬}}-\frac{2}{\text{己壬}}+\frac{1}{2\text{甲己}}-\frac{2}{\text{甲己}}-\frac{2}{\text{乙壬}}+\frac{1}{4\text{甲}^2}-\frac{2}{\text{甲}^2}+\frac{4}{\text{甲}^2}+\frac{1}{4\text{己}^2}=0$$

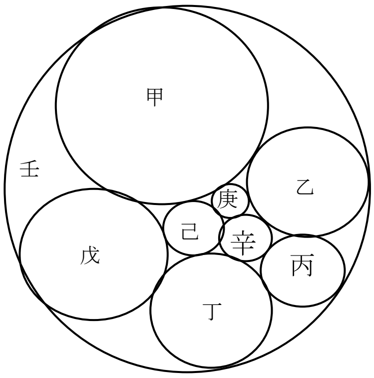
$$\frac{1}{\text{壬}^2}+\frac{1}{\text{乙}^2}-\frac{1}{\text{甲壬}}-\frac{1}{\text{甲乙}}-\frac{1}{\text{乙己}}-\frac{1}{\text{己壬}}-\frac{3}{2\text{甲己}}-\frac{2}{\text{乙壬}}+\frac{9}{4\text{甲}^2}+\frac{1}{4\text{己}^2}=0$$

両辺に$4\text{甲}^2\text{乙}^2\text{己}^2\text{壬}^2$を掛けて

$4\text{甲}^2\text{乙}^2\text{己}^2+4\text{甲}^2\text{壬}^2\text{己}^2-4\text{甲壬乙}^2\text{己}^2-4\text{甲乙壬}^2\text{己}^2$

$-4\text{甲}^2\text{乙壬}^2\text{己}-4\text{甲}^2\text{壬乙}^2\text{己}-6\text{甲乙}^2\text{壬}^2\text{己}-8\text{甲}^2\text{乙壬己}^2+9\text{乙}^2\text{壬}^2\text{己}^2+\text{甲}^2\text{乙}^2\text{壬}^2=0$　（原図前矩合）

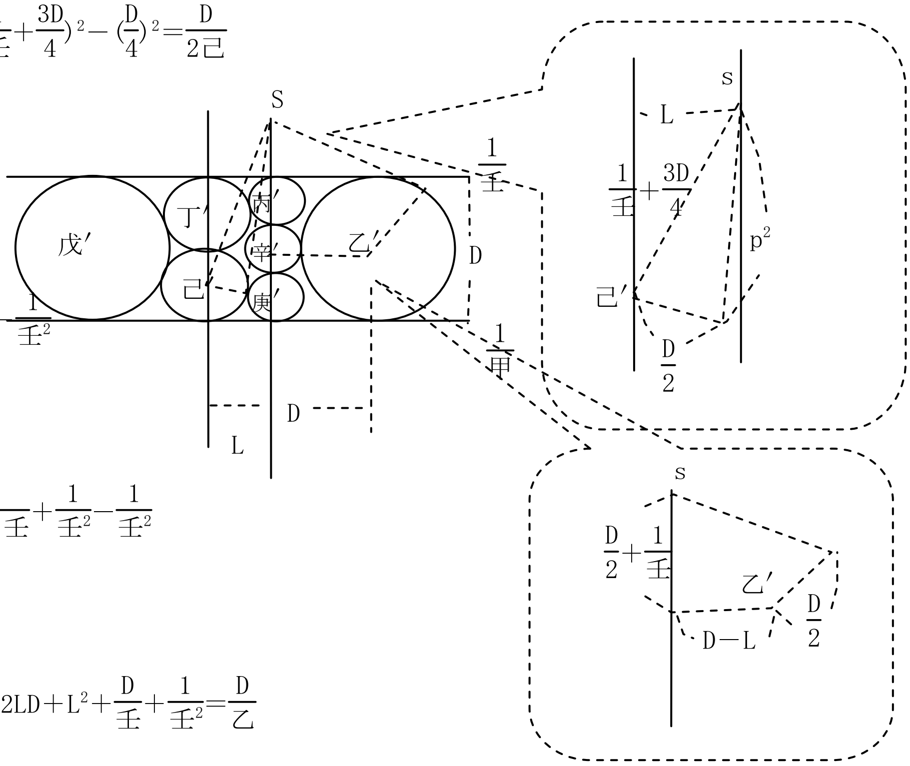
原図と第一図の式は同じ従って原図を第一図のように変換できることがわかる。



第二図

原文の壱図変形之図をｓについて反転する

$D=\frac{1}{甲}-\frac{1}{壬}$ $p^2=\frac{D}{2己}$ $L^2+\left(\frac{1}{壬}+\frac{3D}{4}\right)^2-\left(\frac{D}{4}\right)^2=\frac{D}{2己}$



$L^2+\frac{1}{壬^2}+\frac{3D}{2壬}+\frac{9}{16}D^2-\frac{D^2}{16}=\frac{D}{2己}$

$L^2=D\left(\frac{1}{2己}-\frac{D}{2}-\frac{3}{2壬}\right)-\frac{1}{壬^2}$

$L^2=\left(\frac{1}{甲}-\frac{1}{壬}\right)\left\{\frac{1}{2己}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{甲}-\frac{1}{壬}\right)-\frac{3}{2壬}\right\}-\frac{1}{壬^2}$

$L^2=\left(\frac{1}{甲}-\frac{1}{壬}\right)\left(\frac{1}{2己}-\frac{1}{2甲}-\frac{1}{壬}\right)-\frac{1}{壬^2}$

$=\frac{1}{2甲己}-\frac{1}{2甲^2}-\frac{1}{甲壬}-\frac{1}{2壬己}+\frac{1}{2甲壬}+\frac{1}{壬^2}-\frac{1}{壬^2}$

$=\frac{1}{2甲己}-\frac{1}{2甲^2}-\frac{1}{2甲壬}-\frac{1}{2壬己}$

$(D-L)^2+\left(\frac{D}{2}+\frac{1}{壬}\right)^2-\left(\frac{D}{2}\right)^2=\frac{D}{乙}$ $D^2-2LD+L^2+\frac{D}{壬}+\frac{1}{壬^2}=\frac{D}{乙}$

$2LD=D^2+L^2+\frac{D}{壬}+\frac{1}{壬^2}-\frac{D}{乙}=D^2+D\left(\frac{1}{2己}-\frac{D}{2}-\frac{3}{2壬}\right)-\frac{1}{壬^2}+\frac{D}{壬}+\frac{1}{壬^2}-\frac{D}{乙}=\frac{D^2}{2}+\frac{D}{2己}-\frac{D}{2壬}-\frac{D}{乙}$

$2L=\frac{D}{2}+\frac{1}{2己}-\frac{1}{2壬}-\frac{1}{乙}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{甲}-\frac{1}{壬}\right)+\frac{1}{2己}-\frac{1}{2壬}-\frac{1}{乙}$

$=-\frac{1}{乙}+\frac{1}{2己}+\frac{1}{2甲}-\frac{1}{壬}$ $4L^2=(2L)^2$と置くと

$4\left(\frac{1}{2甲己}-\frac{1}{2甲^2}-\frac{1}{2甲壬}-\frac{1}{2壬己}\right)=\left(-\frac{1}{乙}+\frac{1}{2己}+\frac{1}{2甲}-\frac{1}{壬}\right)^2$

$=\frac{1}{乙^2}+\frac{1}{4己^2}+\frac{1}{4甲^2}+\frac{1}{壬^2}-\frac{1}{乙己}+\frac{1}{2甲己}-\frac{1}{甲壬}+\frac{2}{乙壬}-\frac{1}{己壬}-\frac{1}{甲乙}$

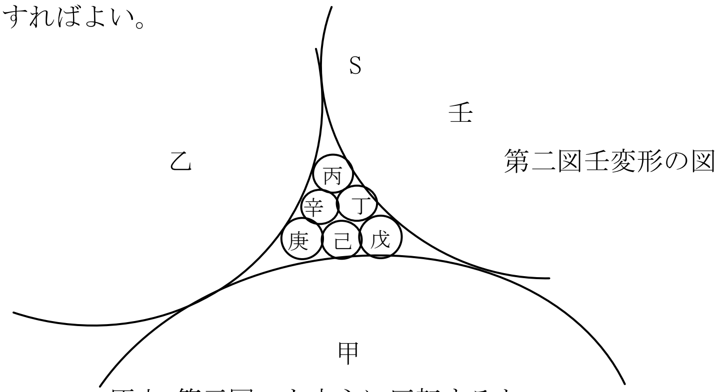
$2\left(\frac{1}{甲己}-\frac{1}{甲^2}-\frac{1}{甲壬}-\frac{1}{壬己}\right)=\frac{1}{乙^2}+\frac{1}{4己^2}+\frac{1}{4甲^2}+\frac{1}{壬^2}-\frac{1}{乙己}+\frac{1}{2甲己}-\frac{1}{甲壬}+\frac{2}{乙壬}-\frac{1}{己壬}-\frac{1}{甲乙}$

$\frac{1}{壬^2}+\frac{1}{乙^2}+\frac{1}{甲壬}-\frac{1}{甲乙}-\frac{1}{乙己}+\frac{1}{己壬}-\frac{3}{2甲己}+\frac{2}{乙壬}+\frac{9}{4甲^2}+\frac{1}{4己^2}=0$ 両辺に$4甲^2壬^2乙^2己^2$を掛けると

$4\text{甲}^2\text{乙}^2\text{己}^2+4\text{甲}^2\text{壬}^2\text{己}^2+4\text{甲壬乙}^2\text{己}^2-4\text{甲乙壬}^2\text{己}^2$

$-4\text{甲}^2\text{乙壬}^2\text{己}+4\text{甲}^2\text{壬乙}^2\text{己}-6\text{甲乙}^2\text{壬}^2\text{己}+8\text{甲}^2\text{乙壬己}^2+9\text{乙}^2\text{壬}^2\text{己}^2+\text{甲}^2\text{乙}^2\text{壬}^2=0$(原図後矩合)

となり、第一図の式の壬を－壬にすればよい。



原文 第三図 s を中心に反転すると

原文　第 3 図の反転図

(原図前矩合)より

$4\text{甲}^2\text{乙}^2\text{己}^2+4\text{甲}^2\text{壬}^2\text{己}^2-4\text{甲壬乙}^2\text{己}^2-4\text{甲乙壬}^2\text{己}^2$

$-4\text{甲}^2\text{乙壬}^2\text{己}-4\text{甲}^2\text{壬乙}^2\text{己}-6\text{甲乙}^2\text{壬}^2\text{己}-8\text{甲}^2\text{乙壬己}^2+9\text{乙}^2\text{壬}^2\text{己}^2+\text{甲}^2\text{乙}^2\text{壬}^2=0$

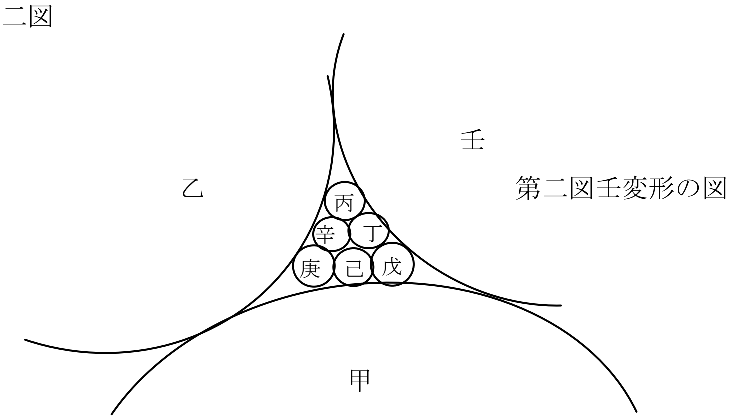
甲^{2}で両辺を割ると

$4\text{乙}^2\text{己}^2+4\text{壬}^2\text{己}^2-4\times\frac{1}{\text{甲}}\text{壬乙}^2\text{己}^2-4\times\frac{1}{\text{甲}}\text{乙壬}^2\text{己}^2-4\text{乙壬}^2\text{己}-4\text{壬乙}^2\text{己}-6\times\frac{1}{\text{甲}}\text{乙}^2\text{壬}^2\text{己}-8\text{乙壬己}^2$

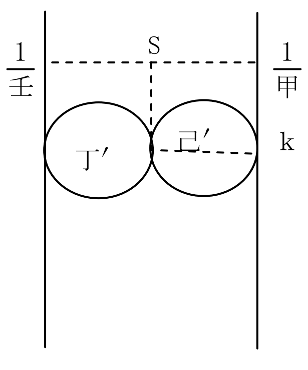
$+9\times\frac{1}{\text{甲}^2}\text{乙}^2\text{壬}^2\text{己}^2+\text{乙}^2\text{壬}^2=0$ となり $\frac{1}{\text{甲}}, \frac{1}{\text{甲}^2}$ の極限値をとると 0 となるから

$4\text{乙}^2\text{己}^2+4\text{壬}^2\text{己}^2-4\text{乙壬}^2\text{己}-4\text{壬乙}^2\text{己}-8\text{乙壬己}^2+\text{乙}^2\text{壬}^2=0$(一図前矩合)

第二図



原図甲、壬の接点を中心として反転した甲、壬、丁、己の反転図



$D=\frac{1}{\text{甲}}+\frac{1}{\text{壬}}$　　$S=\frac{D}{2}-\frac{1}{\text{乙}}$

$K^2+(\frac{D}{4}-S)^2-\frac{D^2}{4}=\frac{D}{2\text{己}}$ ・・・・(1)

$K^2+(S+\frac{D}{4})^2-\frac{D^2}{4}=\frac{D}{2\text{丁}}$ ・・・・(2)

$K^2-\frac{DS}{4}-S^2=\frac{D}{2\text{己}}$　　$K^2+\frac{DS}{2}+S^2=\frac{D}{2\text{丁}}$

(1)(2)より $DS=\frac{D}{2丁}-\frac{D}{2己}$　　$S=\frac{1}{2丁}-\frac{1}{2己}$

$\frac{D}{2}-\frac{1}{甲}=\frac{1}{2丁}-\frac{1}{2己}$　　$\frac{1}{2}(\frac{1}{甲}+\frac{1}{壬})-\frac{1}{甲}=\frac{1}{2丁}-\frac{1}{2己}\frac{1}{2壬}-\frac{1}{2甲}=\frac{1}{2丁}-\frac{1}{2己}$　　$\frac{1}{丁}+\frac{1}{甲}=\frac{1}{壬}+\frac{1}{己}$

甲壬己＋丁壬己－壬甲丁－己甲丁＝0

第三図後の反転図

$(\frac{1}{壬}+\frac{D}{4})^2+L^2-(\frac{D}{4})^2=\frac{D}{2丁}$

$(\frac{1}{壬}+\frac{3D}{4})^2+L^2-(\frac{D}{4})^2=\frac{D}{2己}$

$\frac{1}{壬^2}+\frac{D}{2壬}+\frac{9}{16}D^2+L^2-\frac{D^2}{16}=\frac{D}{2丁}$・・・・(3)

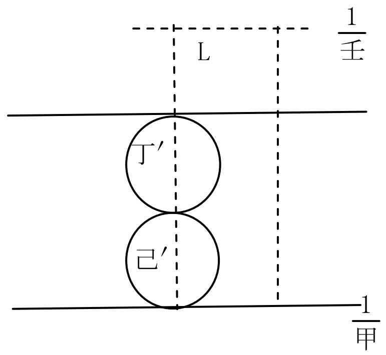
$\frac{1}{壬^2}+\frac{3D}{2壬}+\frac{9}{16}D^2+L^2-\frac{D^2}{16}=\frac{D}{2己}$・・・・(4)

(4)－(3)　$\frac{1}{壬}+\frac{D}{2}=\frac{1}{2己}-\frac{1}{2丁}$

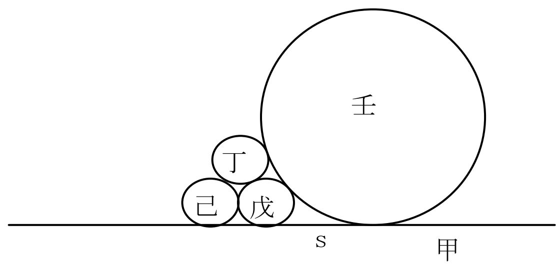
$\frac{1}{2甲}-\frac{1}{2壬}=\frac{1}{2己}-\frac{1}{2丁}$

$-\frac{1}{丁}-\frac{1}{甲}+\frac{1}{己}-\frac{1}{壬}=0$

－甲壬己－丁壬己＋壬甲丁－丁甲己＝0



第四図 s について反転する。



$D=\frac{1}{壬}$

$K^2+(\frac{D}{4})^2-(\frac{D}{4})^2=\frac{D}{2己}$・・・・・・・・・・・・・(5)

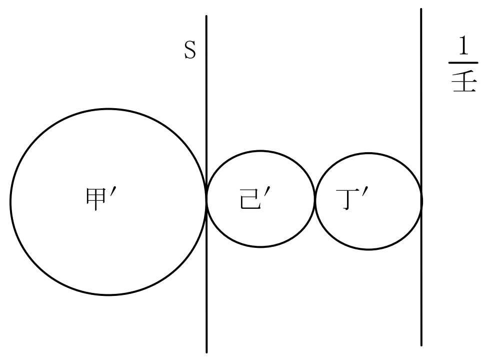
$K^2+(\frac{3D}{4})^2-(\frac{D}{4})^2=\frac{D}{2丁}$・・・・・・・・・・・・・(6)

(6)－(5)　$\frac{8D^2}{16}=\frac{D}{2丁}-\frac{D}{2己}$

$\frac{D^2}{2}=\frac{D}{2丁}-\frac{D}{2己}$

$\frac{1}{壬}=\frac{1}{丁}-\frac{1}{己}$　　$\frac{1}{丁}-\frac{1}{己}-\frac{1}{壬}=0$

壬己－壬丁－己丁＝0 となる。



富松神社第２問の問題と現代解法

渡辺一郎忠貭撰「算法 37 問起源集」による。

今図の如く互いに接した大小輪がある。接した所に黒点があり、小輪を大輪の周上を数度曳く、黒点は大輪離れ小輪周を運行する。共に右回りで小輪を速く曳く、黒点の運行は遅い。小輪を曳く最初の所に復元された時黒点は止まる。小輪背の黒点運行の軌線は成象である。大輪径と小輪径が与えられた時。又何回転かしたとき(この図は四回転の図である。)黒点の軌線術はどうか。

術

小輪で運行背を割る(運行背を過ぎて円周率より小輪半周を引く)、これを原数として自乗したものを率とする。これに原数をかけ 2・3 で割ると一差となる。一差に率をかけ 4・5 で割ると二差となる。二差に率をかけて 6・7 で割ると三差となり、三差に率をかけて 8・9 で割ると四差となる。このようにして求め、偶数は加え奇数は減らす、これを定とする。運行背で施数を割り、大輪周に小輪径を掛けたもの天として、小輪周に小輪径を掛けたものを地とする。天より小輪径を引き擬短径に定をかけると擬余弦、天と地を加えて 2 倍し、短径を減らすし擬長径となる側円(楕円)背を求め、運行背は小輪の半周までは少背、半周を過ぎると多背を求める、
黒点運行軌線に合問

(現代的解説)

子＝元×小矢　応矢背較表によって　某矢＝初×矢

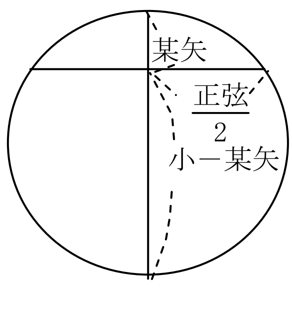
$\text{某正弦}=2\sqrt{\text{天・小・矢・初}}$　　(天＝1－初・率)

$\text{某正弦差}=\dfrac{\text{元}\sqrt{\text{小・矢}}}{2\sqrt{\text{初・天}}}(1-2\,\text{初・率})$　　(初・矢＝某矢　　$\text{率}=\dfrac{\text{矢}}{\text{小}}$)

運行背：小背較＝施背：大背較

$\text{某小背較}=\dfrac{\text{運行背・大背較}}{\text{施背}}$　　　$\text{某小背較}=\dfrac{\text{元}\sqrt{\text{小・矢}}}{2\sqrt{\text{初・天}}}$

$\text{某矢}:\dfrac{\text{正弦}}{2}=\dfrac{\text{正弦}}{2}:(\text{小}-\text{某矢})$



$\dfrac{\text{正弦}^2}{4}=\text{某矢}(\text{小径}-\text{某矢})$

$\text{正弦}=2\sqrt{\text{某矢}(\text{小径}-\text{某矢})}$　　(某矢＝初×矢)

$=2\sqrt{\text{初×矢}(\text{小径}-\text{初×矢})}$　(天＝1－初・率)

$=2\sqrt{\text{初×矢・小径}\left(1-\dfrac{\text{初・矢}}{\text{小径}}\right)}$

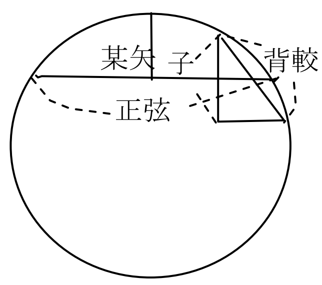
$=2\sqrt{\text{矢・小・天・初}}$ ただし矢＝小・率

$\text{天}=1-\text{初}\cdot\dfrac{\text{矢}}{\text{小径}}$

某背較　：子　＝ 某矢　：　正弦

$\text{某背較}=\dfrac{\text{子・某矢}}{\text{正弦}}=\dfrac{\text{元×小矢・某矢}}{\text{正弦}}$

$=\dfrac{\text{元×小・矢}}{2\sqrt{\text{矢・小・天・初}}}$



$$=\frac{元\times\sqrt{小^2・矢^2}}{2\sqrt{矢・小・天・初}}$$

$$=\frac{元\sqrt{小・矢}}{2\sqrt{初・天}}$$ （某矢＝初×矢）

比例１によって $某大背較=\frac{元・大・周率・施数\sqrt{小・矢}}{2行背\sqrt{初・天}}$

三斜術によって　$辰=\frac{某大背較^2}{大}$　　$辰=\frac{大径^2・周率^2・施数^2・小・矢・元^2}{4・初・天・行^2}$　　$元^2=(\frac{1}{n})^2=0$

施背＝大×円周率×施数　　元冪は０である。故に辰は零である。

すなわち巳は大背較であり、午は大の半分である比例は次ぎの様になる。

（訳）

$丑=\frac{大}{2}+某矢+子$　　某次正弦＝某正弦＋２某正弦差　　某次正弦半＝地　　寅＝丑

$子=寅-某矢-\frac{大}{2}$　　子＋天＝勾　　比例によって　$卯=某大背較(1+\frac{2某矢}{大}+\frac{2子}{大})$

$天=\frac{某大背較}{大}(某正弦+2某正弦差)$　　大 ： 某次正弦 ＝某大背較 ： 天

$天+子=勾=\frac{某大背較}{大}(某正弦+2某正弦差)+子$

$勾=\frac{某大背較}{大}(某正弦+2某正弦差)+元・小矢$

$=\frac{某大背較}{大}(某正弦+2某正弦差)+元・小矢$　　$某大背較=\frac{元・大・周率・施数\sqrt{小・矢}}{2行背\sqrt{初・天}}$

$$=\frac{元・周率・施数\sqrt{小・矢}}{2行背\sqrt{初・天}}\{2\sqrt{天・小・矢・初}+\frac{元\sqrt{小・矢}}{\sqrt{初・天}}(1-2初・率)\}+元・小矢$$

$$=\frac{元・周率・施数\sqrt{小・矢}}{2行背\sqrt{初・天}}\{2\sqrt{天・小・矢・初}+\frac{元\sqrt{小・矢}}{\sqrt{初・天}}(1-2初・率)\}+元・小矢$$

$$勾=矢・\frac{小・施数・周率}{行背}\{(元+\frac{元^2}{2初天}-\frac{率元^2}{天})+元\}$$

$股=-地(某次正弦半)+\frac{某正弦}{2}+卯$　$卯=某大背較(1+\frac{2某矢}{大}+\frac{2子}{大})$を代入して

$$=-地(某次正弦半)+\frac{某正弦}{2}+某大背較(1+\frac{2某矢}{大}+\frac{2子}{大})$$

$$=某大背較(1+\frac{2某矢}{大}+\frac{2子}{大})-某正弦差$$

$$=\frac{元・大・周率・施数\sqrt{小・矢}}{2行背\sqrt{初・天}}(1+\frac{2某矢}{大}+\frac{2子}{大})-\frac{元\sqrt{小・矢}}{\sqrt{初・天}}(1-2初・率)$$

某矢＝初・矢　，子＝元・小矢だから

$$股=\frac{\sqrt{小・矢}}{\sqrt{初・天}}\{\frac{周率・施数}{行背}(\frac{大・元}{2}+矢・初・元+矢・元^2)-\frac{元}{2}+率・初・元\}$$

元^{2}を掛けたものは0,　率$=\dfrac{矢}{小}$であるから勾$=$矢・元$\left(\dfrac{小・周率・施数}{行背}+1\right)$

$$股=\frac{元\sqrt{小・矢}}{\sqrt{初・天}}\left\{\frac{周率・施数}{行背}\left(\frac{大}{2}+率・初・小\right)-\frac{1}{2}+初・率\right\}$$

$$股=\frac{元\sqrt{小・矢}}{\sqrt{初・天}}\left\{\frac{周率・施数}{行背}\times\frac{大}{2}+\frac{周率・施数}{行背}\times率・初・小-\frac{1}{2}+初・率\right\}$$

$$=\frac{元\sqrt{小・矢}}{2\sqrt{初・天}}\left\{\frac{大・周率・施数}{行背}-1+2\times\frac{小・周率・施数}{行背}\times率・初+2初・率\right)$$

又　甲$=\dfrac{小・周率・施数}{行背}+1$　乙$=\dfrac{大・周率・施数}{行背}-1$　だから

勾$=$元・矢・甲　　　股$=\dfrac{元\sqrt{小・矢}}{2\sqrt{初・矢}}\{乙+2甲・率・初)$ となり

$$股^2+勾^2=\frac{元^2}{4初・天}\{小・矢(乙^2+4甲・乙・率・初+4甲^2・率^2・初^2)+4甲^2・矢^2・天・初)$$

$$=\frac{元^2}{4初・天}\{小・矢\{乙^2+4甲・乙・率・初+4甲^2・率^2・初^2\}+4甲^2・矢^2・(1-初・率)・初\}$$

$$=\frac{元^2}{4初・天}\{小・矢\{乙^2+4甲・乙・率・初+4甲^2・率^2・初^2+4甲^2・矢^2・\frac{1}{小・矢}(1-初・率)・初\}$$

$$=\frac{元^2}{4初・天}\{小・矢\{乙^2+4甲・乙・率・初+4甲^2・率^2・初^2+4甲^2・矢・\frac{1}{小}(1-初・率)・初\}$$

$$=\frac{元^2}{4初・天}\{小・矢\{乙^2+4甲・乙・率・初+4甲^2・率^2・初^2+4甲^2・率(1-初・率)・初\}$$

$$=\frac{元^2}{4初・天}\{小・矢\{乙^2+4甲・乙・率・初+4甲^2・率^2・初^2+4甲^2・率・初-4甲^2・初^2・率^2\}$$

$$=\frac{元^2}{4初・天}・小・矢(乙^2+4甲・乙・率・初+4甲^2・率・初\}$$

$$=\frac{元^2}{4初・天}\{小・矢(乙^2+4甲・率・初(乙+甲)$$

$$=\frac{元^2}{4初・天}\{小・矢(乙^2+4甲・率・初\{\frac{大・周率・施数}{行背}-1+\frac{小・周率・施数}{行背}+1\}$$

$$=\frac{元^2}{4初・天}\{小・矢(乙^2+4甲・率・初・\{\frac{(大+小)・周率・施数}{行背}\}$$

某線冪解　　某線冪$=\dfrac{矢・小・元^2}{4初・天}\left(乙^2+\dfrac{4(大+小)・周率・施数・率・甲・初}{行背}\right)$

丙$=\dfrac{4甲・率・施数・周率(大+小)}{乙^2・行背}$ とすると

$$某線=\sqrt{\frac{矢・小・乙^2・元^2}{4初・天}(1+丙・初・率)}$$

(訳)

$$某線=\sqrt{\frac{矢・小・乙^2・元^2}{4初・天}(1+丙・初・率)}=\frac{元・乙\sqrt{小・矢}}{2\sqrt{初・天}}\sqrt{1+丙・初・率)}$$

（注）

現代的に

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ として $x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ 楕円の周Lは

$L=4\int_0^b \sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y^2}{b^2-y^2}}\ dy$ ここで $y=b\sqrt{t}$ で変換して $c=\frac{a^2}{b^2}-1$ とおく

$=2b\int_0^1 \frac{\sqrt{1+ct}}{\sqrt{t(1-t)}}\ dt$ が 2a, 2b を両端とする楕円周である。

$=2b\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\ (1+\frac{1}{2}\ ct-\frac{1}{8}c^2t^2+\frac{3}{48}c^3t^3-\frac{15}{384}c^4t^4+\cdots)dt$

$=4b\cdot\frac{\pi}{4}(1+\frac{1}{2^2}\ c-\frac{3}{8^2}c^2+\frac{3\cdot 15}{48^2}c^3-\frac{15\cdot 105}{384^2}c^4+\cdots)$

某線$=\frac{\text{元・乙}\sqrt{\text{小・矢}}}{2\sqrt{\text{初・天}}}\sqrt{1+\text{丙・初・率}})$ を積分すると積分すると元$=\frac{1}{n}$ はなくなる。

黒点軌線$=\int_0^1 \frac{\text{乙}\sqrt{\text{小・矢}}}{2\sqrt{\text{初・天}}}\sqrt{1+\text{丙・初・率}}\ d\text{初})$

$=\text{乙}\sqrt{\text{小・矢}}\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\text{初・(1－初・率)}}}\times\sqrt{1+\text{丙・初・率}}\ d\text{初}$

初$=t$,　とすると

$=\text{乙}\sqrt{\text{小・矢}}\int_0^1 \frac{\sqrt{1+\text{丙}\cdot t\cdot\text{率}}}{2\sqrt{t\cdot(1-t\cdot\text{率})}}\ dt$ となり楕円周になる。ここで丙$=\frac{\text{長径}^2}{\text{短径}^2}-1$

楕円積分となり、結果は現代と同じである。

某線$=\frac{\text{元・乙}\sqrt{\text{小・矢}}}{2\sqrt{\text{初・天}}}(1+\frac{\text{丙・初・率}}{2}-\frac{\text{丙}^2\text{・初}^2\text{・率}^2}{8}+\frac{3\text{丙}^3\text{・初}^3\text{・率}^3}{48}-\frac{15\text{丙}^4\text{・初}^4\text{・率}^4}{384}$

$+\frac{105\text{丙}^5\text{・初}^5\text{・率}^5}{3840}-\cdots\cdots)$

遍乗$\frac{\text{元・乙}\sqrt{\text{小・矢}}}{2\sqrt{\text{初}}}$ $=X$ とおくと

$X\cdot\frac{1}{\sqrt{\text{天}}}=X\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\text{初・率}}}\ (1+\frac{\text{丙・初・率}}{2}-\frac{\text{丙}^2\text{・初}^2\text{・率}^2}{8}+\frac{3\text{丙}^3\text{・初}^3\text{・率}^3}{48}-\frac{15\text{丙}^4\text{・初}^4\text{・率}^4}{384}+\frac{105\text{丙}^5\text{・初}^5\text{・率}^5}{3840}$

$-\cdots\cdots)$

$=X(1+\frac{\text{初・率}}{2}+\frac{3\text{初}^2\text{・率}^2}{8}+\frac{15\text{初}^3\text{・率}^3}{48}+\frac{105\text{初}^4\text{・率}^4}{384}+\cdots)(\ 1+\frac{\text{丙・初・率}}{2}-\frac{\text{丙}^2\text{・初}^2\text{・率}^2}{8}+\frac{3\text{丙}^3\text{・初}^3\text{・率}^3}{48}$

$\frac{15\text{丙}^4\text{・初}^4\text{・率}^4}{384}+\frac{105\text{丙}^5\text{・初}^5\text{・率}^5}{3840}-\cdots\cdots)$

$=X\times(1+\frac{\text{初・率}}{2}+\ \frac{3\text{初}^2\text{・率}^2}{8}+\frac{15\text{・初}^3\text{・率}^3}{48}+\frac{105\text{初}^4\text{・率}^4}{384}+\cdots)$

$\frac{\text{丙・初・率}}{2}\ (1+\frac{\text{初・率}}{2}+\ \frac{3\text{初}^2\text{・率}^2}{8}+\frac{15\text{・初}^3\text{・率}^3}{48}+\frac{105\text{初}^4\text{・率}^4}{384}+\cdots)$

$\frac{3\text{丙}^3\text{・初}^3\text{・率}^3}{48}(-1-\frac{\text{初・率}}{2}-\ \frac{3\text{初}^2\text{・率}^2}{8}-\frac{15\text{・初}^3\text{・率}^3}{48}-\frac{105\text{初}^4\text{・率}^4}{384}-\cdots)$

$$\text{乙}\sqrt{\text{小・矢}}\{\frac{1}{2\sqrt{\text{初}}}\ (1+\frac{\text{初・率}}{2}+\frac{3\text{初}^2\text{・率}^2}{8}+\frac{15\text{・初}^3\text{・率}^3}{48}+\frac{105\text{初}^4\text{・率}^4}{384}+\cdot\cdot\cdot)$$

$$\frac{\text{丙・初・率}}{2}\ (1+\frac{\text{初・率}}{2}+\frac{3\text{初}^2\text{・率}^2}{8}+\frac{15\text{・初}^3\text{・率}^3}{48}+\frac{105\text{初}^4\text{・率}^4}{384}+\cdot\cdot\cdot)$$

$$\frac{3\text{丙}^3\text{・初}^3\text{・率}^3}{48}(-1-\frac{\text{初・率}}{2}-\frac{3\text{初}^2\text{・率}^2}{8}-\frac{15\text{・初}^3\text{・率}^3}{48}-\frac{105\text{初}^4\text{・率}^4}{384}-\cdot\cdot\cdot)\cdot\cdot\cdot\cdot\}$$

$$=\text{乙}\sqrt{\text{小・矢}}\{(\frac{1}{2\sqrt{\text{初}}}+\frac{\text{初・率}}{4\sqrt{\text{初}}}+\frac{3\text{初}^2\text{・率}^2}{16\sqrt{\text{初}}}+\frac{15\text{・初}^3\text{・率}^3}{96\sqrt{\text{初}}}+\frac{105\text{初}^4\text{・率}^4}{768\sqrt{\text{初}}}+\cdot\cdot\cdot)$$

$$\frac{\text{丙・初・率}}{4\sqrt{\text{初}}}\ (1+\frac{\text{初・率}}{2}+\frac{3\text{初}^2\text{・率}^2}{8}+\frac{15\text{・初}^3\text{・率}^3}{48}+\frac{105\text{初}^4\text{・率}^4}{384}+\cdot\cdot\cdot)$$

$$\frac{3\text{丙}^3\text{・初}^3\text{・率}^3}{96\sqrt{\text{初}}}(-1-\frac{\text{初・率}}{2}-\frac{3\text{初}^2\text{・率}^2}{8}-\frac{15\text{・初}^3\text{・率}^3}{48}-\frac{105\text{初}^4\text{・率}^4}{384}-\cdot\cdot\cdot)\ \cdot\cdot\cdot\}$$

極商表で之を畳み(積分する)

$$\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{\text{初}}}d\text{初}=\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=1\ ,\ \int_0^1\frac{3\text{初}^2}{16\sqrt{\text{初}}}d\text{初}=\int_0^1\frac{3x^2}{16\sqrt{x}}dx=\frac{3}{5\cdot 8}$$ となるから上の式は次のようになる

黒点運行の軌跡は

$$\text{乙}\sqrt{\text{矢・小}}\{(1+\frac{\text{率}}{2\cdot 3}+\frac{3\text{率}^2}{5\cdot 8}+\frac{15\text{率}^3}{7\cdot 48}+\frac{105\text{率}^4}{9\cdot 384}+\cdot\cdot)+\frac{\text{丙}}{2}(\frac{\text{率}}{3}+\frac{\text{率}^2}{5\cdot 2}+\frac{3\text{率}^3}{7\cdot 8}+\frac{15\text{率}^4}{9\cdot 48}+\frac{105\text{率}^5}{11\cdot 384}+\cdot\cdot)$$

$$+\frac{\text{丙}^2}{8}(-\frac{\text{率}^2}{5}-\frac{\text{率}^3}{7\cdot 2}-\frac{3\text{率}^4}{9\cdot 8}-\frac{15\text{率}^5}{11\cdot 48}-\frac{105\text{率}^5}{13\cdot 384}\cdot\cdot)+\frac{3\text{丙}^3}{48}(\frac{\text{率}^3}{7}+\frac{\text{率}^4}{9\cdot 2}+\frac{3\text{率}^5}{11\cdot 8}+\frac{15\text{率}^5}{13\cdot 48}+\frac{105\text{率}^6}{15\cdot 384}\cdot\cdot)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\}$$

(参考)

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{3x^3}{48}-\frac{15x^4}{384}+\frac{105x^5}{3840}-\cdot\cdot\cdot$$

$$\sqrt{1+\text{丙・初・率}}=1+\frac{\text{丙・初・率}}{2}-\frac{\text{丙}^2\text{・初}^2\text{・率}^2}{8}+\frac{3\text{丙}^3\text{・初}^3\text{・率}^3}{48}-\frac{15\text{丙}^4\text{・初}^4\text{・率}^4}{384}+\cdot\cdot\cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\frac{15x^3}{48}+\frac{105x^4}{384}+\cdot\cdot\cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\text{初・率}}}=1+\frac{\text{初・率}}{2}+\frac{3\text{初}^2\text{・率}^2}{8}+\frac{15\text{初}^3\text{・率}^3}{48}+\frac{105\text{初}^4\text{・率}^4}{384}+\cdot\cdot\cdot$$

極商表で之を畳み(積分する)

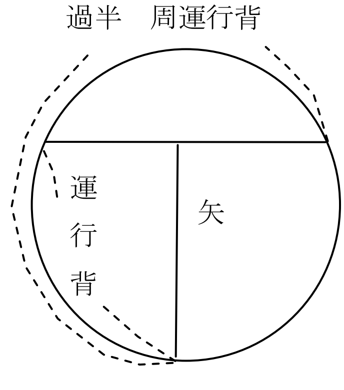
黒点運行の軌跡は

$$\text{乙}\sqrt{\text{矢・小}}\{(1+\frac{\text{率}}{2\cdot 3}+\frac{3\text{率}^2}{5\cdot 8}+\frac{15\text{率}^3}{7\cdot 48}+\frac{105\text{率}^4}{9\cdot 384}+\cdot\cdot)$$

$$+\frac{\text{丙}}{2}(\frac{\text{率}}{3}+\frac{\text{率}^2}{5\cdot 2}+\frac{3\text{率}^3}{7\cdot 8}+\frac{15\text{率}^4}{9\cdot 48}+\frac{105\text{率}^5}{11\cdot 384}+\cdot\cdot)$$

$$+\frac{\text{丙}^2}{8}(-\frac{\text{率}^2}{5}-\frac{\text{率}^3}{7\cdot 2}-\frac{3\text{率}^4}{9\cdot 8}-\frac{15\text{率}^5}{11\cdot 48}-\frac{105\text{率}^5}{13\cdot 384}\cdot\cdot)$$

$$+\frac{3\text{丙}^3}{48}(\frac{\text{率}^3}{7}+\frac{\text{率}^4}{9\cdot 2}+\frac{3\text{率}^5}{11\cdot 8}+\frac{15\text{率}^5}{13\cdot 48}+\frac{105\text{率}^6}{15\cdot 384}\cdot\cdot)$$



$+\frac{15丙^4}{384}(-\frac{率^4}{9}-\frac{率^5}{11・2}-\frac{3率^6}{13・8}-\frac{15率^7}{15・48}-\frac{105率^8}{17・384}-・・)・・・・・・・・・\}$

$\sin^{-1}x=x+\frac{1}{2・3}x^3+\frac{1・3}{2・4・5}x^5+\frac{1・3・5}{2・4・6・7}x^7+\frac{1・3・5・7}{2・4・6・8・9}x^9+・・・$（『微積分学』井上正雄他 p.270)

$\sin^{-1}\sqrt{率}=\sqrt{率}+\frac{1}{2・3}\sqrt{率}^3+\frac{1・3}{2・4・5}\sqrt{率}^5+\frac{1・3・5}{2・4・6・7}\sqrt{率}^7+\frac{1・3・5・7}{2・4・6・8・9}\sqrt{率}^9+・・・$

$=\sqrt{率}(1+\frac{率}{2・3}+\frac{3率^2}{5・8}+\frac{15率^3}{7・48}+\frac{105率^4}{9・384}+・・・$

$\sqrt{矢・小}=小\sqrt{率}$だから

$乙\sqrt{矢・小}(1+\frac{率}{2・3}+\frac{3率^2}{5・8}+\frac{15率^3}{7・48}+\frac{105率^4}{9・384}+・・・=\sin^{-1}\sqrt{率})$

$乙小\sqrt{率}\ (1+\frac{率}{2・3}+\frac{3率^2}{5・8}+\frac{15率^3}{7・48}+\frac{105率^4}{9・384}+・・・)=乙小\ \sin^{-1}\sqrt{率}$

(訳)

按此象に遍乗して　正弦をなす。楕円を求め、正背象全等を与えその長、短径を求め

$正弦=乙\sqrt{矢・小}=乙小\sqrt{率}$　，　$正弦=小\sqrt{率}(\frac{大・周率・施数}{行背}-1)$　$率=\frac{正弦^2}{短径^2}$

$短径=\frac{正弦}{\sqrt{率}}$　　$短径=小乙=小(\frac{大・周率・施数}{行背}-1)=\frac{小・大・周率・施数}{行背}-小=天-小$

ただし　$\boxed{乙=\frac{小・大・周率・施数}{行背}-1}$　，　$\boxed{\frac{小・大・周率・施数}{行背}=天}$

$\boxed{\frac{長^2}{短^2}-1-丙=0}$　　$長径^2=短径^2(1+丙)$

$長径^2=小径^2(乙^2+\frac{4(大+小)・周率・施数・甲}{行背})$

$=小径^2(乙^2+4甲(\frac{大・周率・施数}{行背}-1+\frac{小・周率・施数}{行背}+1)$

長径＝小(乙＋2 甲)

$長径^2=小^2(乙^2+4甲・乙+4甲^2)$　　　$短径=小(\frac{大・周率・施数}{行背}-1)$　　$正弦=短径\sqrt{率}$

$長径=小(\frac{大・周率・施数}{行背}+1+\frac{2小・周率・施数}{行背})$　　擬背＝2 行背　　擬径＝小　通元表によって求める。

$=\frac{小・大・周率・施数}{行背}+小+2\times小\times\frac{小・周率・施数}{行背}$

$=(2天+2小+2地-天-小)=2\times(天+地)-短$

ただし　$甲=\frac{小・周率・施数}{行背}-1$，　$\frac{小・周率・施数}{行背}=地$

$\boxed{短径=天-小}$　，　$\boxed{長径=2(天+地)-短}$　，の楕円の周を求める。

$\frac{\sqrt{矢・径}}{小}=\sqrt{率}$　　　$正=率=\frac{行^2}{小^2}$　　　$原数^2=率$

$$\boxed{\sqrt{正}\left(1-\frac{正}{3\cdot 2}+\frac{正^2}{15\cdot 8}-\frac{正^3}{105\cdot 48}+\frac{正^4}{945\cdot 384}+\cdots\cdots\right)=\sin\left(\sqrt{正}=\sqrt{\frac{矢}{小}}=\sqrt{率}\right)=定}$$

原数 $=\sqrt{正}$,一差 $=-\dfrac{正\cdot原数}{3\cdot 2}$,二差 $=\dfrac{正\cdot一差}{5\cdot 4}$,三差 $=-\dfrac{正\cdot二差}{7\cdot 6}$, 四差 $=\dfrac{正\cdot三差}{9\cdot 8}$

短径×定＝短径 $\sin\sqrt{正}$＝弦

(参考)

和田寧の応率八象表の付録見商表に加藤平左衛門著『和算の研究　補遺 1』p.31 又は藤井康生・米光丁共著『拾璣算法』p.281 参照のこと

$$弦=背\left(1-\frac{率}{2\cdot 3}+\frac{率^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{率^3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\frac{率^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}+\cdots\cdots\right)$$

$率=\dfrac{背^2}{径^2}$ とある。だから　背＝s ,径＝d　としてこれを変形すると

$$弦=d\left(\frac{s}{d}-\frac{1}{2!}\left(\frac{s}{d}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{s}{d}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{s}{d}\right)^7+\frac{1}{9!}\left(\frac{s}{d}\right)^9+\cdots\cdots\right)$$

$=d\sin\left(\dfrac{s}{d}\right)$ ここでは率＝正＝$\dfrac{行^2}{小^2}$としている。$\sin\left(\dfrac{s}{d}\right)$＝定とおいて弦＝短径×正としている。

$$\sin\sqrt{正}=\sqrt{正}\left(1-\frac{正}{3!(=3\cdot 2)}+\frac{正^2}{5!(=15\cdot 8)}-\frac{正^3}{7!(=105\cdot 48)}+\frac{正^4}{9!(=945\cdot 384)}+\cdots\cdots\right)$$

(『微積分学』井上正雄他 p.267)

運行背が小輪の半周を過ぎると余背＝$\dfrac{小\cdot周率-行背}{小}$＝周率－$\sqrt{正}$

(解説)

$\dfrac{運行背}{小輪}$＝原数とする。原数 ^{2}＝率　　率×$\dfrac{原数}{2\cdot 3}$ ＝一差、　率×$\dfrac{一差}{4\cdot 5}$ ＝二差、　率×$\dfrac{二差}{6\cdot 7}$ ＝三差、

率×$\dfrac{三差}{8\cdot 9}$ ＝四差・・・　原－(一差)＋二差－(三差)＋四差・・・・＝定とする。

$\dfrac{施数\times大輪周\times小輪径}{運行背}$＝天、　$\dfrac{施数\times小輪周\times小輪径}{運行背}$＝地おく

天－小輪径＝擬短径、短径×定＝擬正弦、2×(天＋地)－短径＝擬長径　短径と長径の楕円の背を求めて
運行背は小輪半周まで、運行背が半周を過ぎると多背を求めると黒点運行軌線となる。

(注)　某線＝$\dfrac{元\cdot乙\sqrt{小\cdot矢}}{2\sqrt{初\cdot天}}\sqrt{1+丙\cdot初\cdot率}$)＝$\dfrac{元\cdot短径\cdot率}{2\sqrt{初\cdot天}}\sqrt{1+丙\cdot初\cdot率}$)

＝$\dfrac{元\cdot短径\cdot定}{2\sqrt{初\cdot天}}\sqrt{1+丙\cdot初\cdot定}$)は楕円となり丙＝$\dfrac{長^2}{短^2}-1$ である。

$$短径\cdot定\left\{\left(1+\frac{率}{2\cdot 3}+\frac{3率^2}{5\cdot 8}+\frac{15率^3}{7\cdot 48}+\frac{105率^4}{9\cdot 384}+\cdot\cdot\right)+\frac{丙}{2}\left(\frac{率}{3}+\frac{率^2}{5\cdot 2}+\frac{3率^3}{7\cdot 8}+\frac{15率^4}{9\cdot 48}+\frac{105率^5}{11\cdot 384}+\cdot\cdot\right)\right.$$

$$\left.+\frac{丙^2}{8}\left(-\frac{率^2}{5}-\frac{率^3}{7\cdot 2}-\frac{3率^4}{9\cdot 8}-\frac{15率^5}{11\cdot 48}-\frac{105率^5}{13\cdot 384}\cdot\cdot\right)+\frac{3丙^3}{48}\left(\frac{率^3}{7}+\frac{率^4}{9\cdot 2}+\frac{3率^5}{11\cdot 8}+\frac{15率^5}{13\cdot 48}+\frac{105率^6}{15\cdot 384}\cdot\cdot\right)\cdots\cdots\right\}$$

と楕円周を求める。
原数を求め、級数で定を求めている。正＝率でより正確な率を求め、某線は畳む(積分する)と楕円になる。
天(起源の天とは異なる)と地を求め、短径、長径を求めて楕円の周が黒点の運行の軌線となるが小円の半円を過ぎると運行背を周率－$\sqrt{正}$とする。

(参考)
この富松神社第2問は長崎の加悦俊興著『算法円理括嚢』にある第5問の拡張した問題といえよう。この本は中国が日本から輸入した『算法天生法指南』・『算法起源集』と三冊のうちの一冊の本として知られている。加悦俊興は実在人物かと論議されたこともあるが、『佐久間庸軒の旅日記』では遊歴人名簿の中に記載されている。加悦の本は当時二度翻訳された。1886年『疇人傳三編』には加悦俊興だけ日本人が載せられている。またこの本は遊歴算家法道寺善が諸国遍歴の旅から1863年江戸に帰り『算法円理括嚢』は自分の著作である旨を川北朝鄰に語ったことが川北から遠藤利貞、岡本則録に伝えられたと数年前平山諦先生からお頼り頂いた。『算法三十七問起源集』の中に法道寺善の名前の如き文章があり、この問題の神田宇平原重文は加悦俊興の弟子か遊歴算家法道寺善から直接指導受けたものかもしれない。

『算法円理括嚢』の第5問の問題

(注)PDFにしてwebに流すため写真を省略しているので、文章が会わない部分があるかもしれないので
了承してください。