

『解見題之法』 関孝和著

三部抄の首巻で、図形上に現れた問題を解く基本となるもの。

加減第一附併、分合第二附添削化、全乗第三、折乗第四の四つに分かれている。

1. 不等四辺形

甲、乙、丙がわかっているときの積は

$$\text{四辺形の積} = \frac{1}{2}(\text{甲乙} + \text{甲丙})$$

2. 正三角形で勾、股、弦がわかっているとき、
勾股弦和冪はいくらか。

$$\text{弦}^2 = \text{勾}^2 + \text{股}^2$$

3. 正方形形での積は自方の自乗、
立方体の積は自方の三乗。

4. 台形、三平方の定理の証明

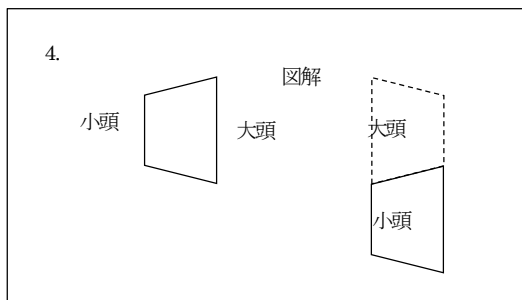
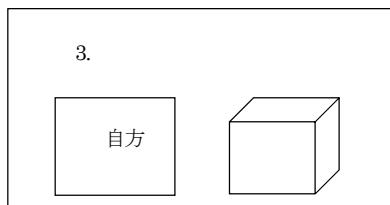
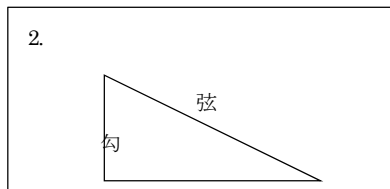
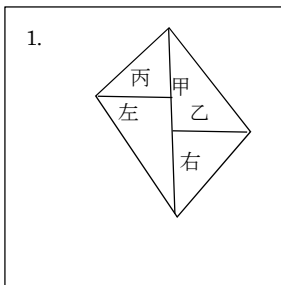
$$\text{台形の積} = \frac{1}{2} \text{高さ}(\text{小頭} + \text{大頭})$$

※正三角錐(四面体)

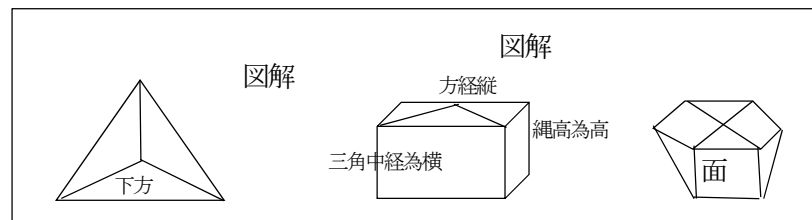
$$\text{正四面体の積} = \sqrt{\frac{\text{方}^6}{72}} = \frac{\text{方}^3 \sqrt{2}}{12}$$

『求積』問. 35 参照

$$\text{五面体の積} = \frac{1}{3}(\text{下方}^2 \times \text{高さ})$$



『解見題之法』



一辺が a の正三角形の面積 $= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, 正四面体の高さ $= \frac{a \sqrt{6}}{3}$

$$\text{正四面体の積} = \frac{1}{3} \left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \times \frac{a \sqrt{6}}{3} \right) = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

※切籠(立方体の8つの角を切り取ったもの)の体積

9(切子積)²=50(一辺の長さ)⁶となる。

切籠の一辺の長さを a とすると、立方体の一辺は $\sqrt{2}a$ となる。一角を正三角形で切ると三角錐となる。

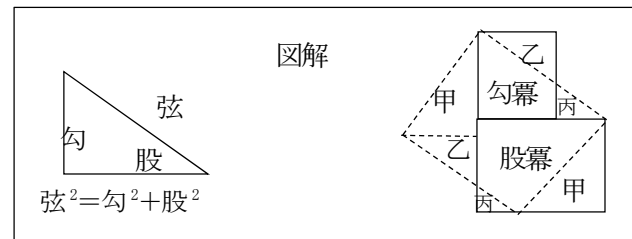
三角錐の一辺は a だから正三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ となる。

高さは $\frac{\sqrt{2}}{3} a$ となるから三角錐の体積は $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{3} a \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ となる。

切籠は8個切るわけだから

$$\text{切籠積} = \text{立方体の体積} 2\sqrt{2}a^3 - \frac{\sqrt{2}}{3} a^3 = \frac{5\sqrt{2}}{3} a^3 \quad \text{『求積』問. 36 参照}$$

※勾股弦の定理(勾²+股²=弦²) 三平方の定理を証明する図

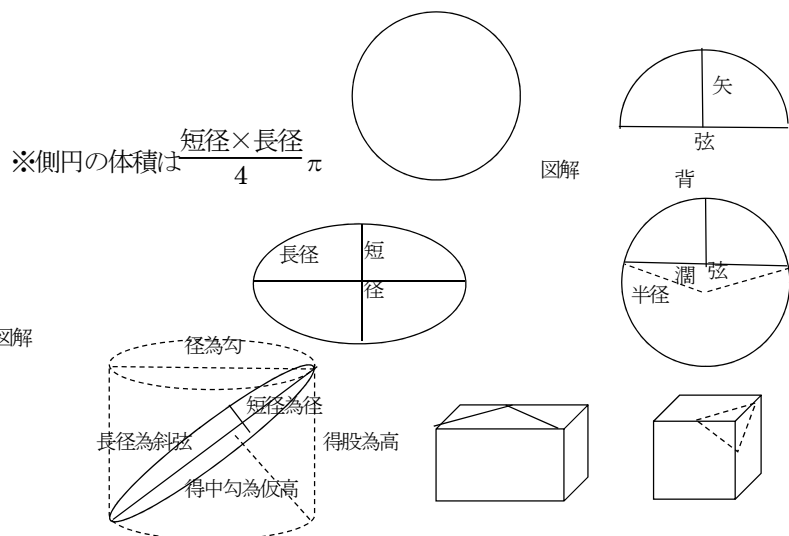


『解見題之法』

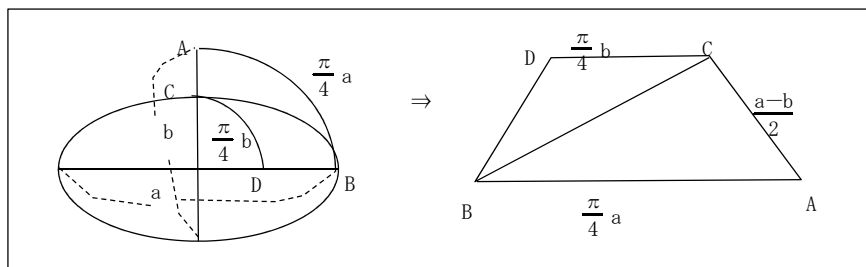
※直径がDの円の面積は $\frac{D^2}{4}\pi$

※円弧の面積 = $\frac{\text{円径} \times \text{背} - (\text{円径} - 2\text{矢}) \text{弦}}{4}$ 、球闕積 = 矢 $(4\text{矢}^2 + 3\text{弦}^2) \frac{\pi}{24}$ (『求積』、

問 45 参照)、球闕表面積 = $(4\text{矢}^2 + \text{弦}^2) \frac{\pi}{6}$ (『求積』、問 59 参照)



関孝和の『解見題之法』には $\text{周}^2 = \pi^2 \times \text{長径} \times \text{短径} + 4(\text{長径} - \text{短径})^2$ について『和算の研究』雑論 p. 19 では次のように説明している。 $BC^2 = DC \cdot AB + BD^2$



『解見題之法』

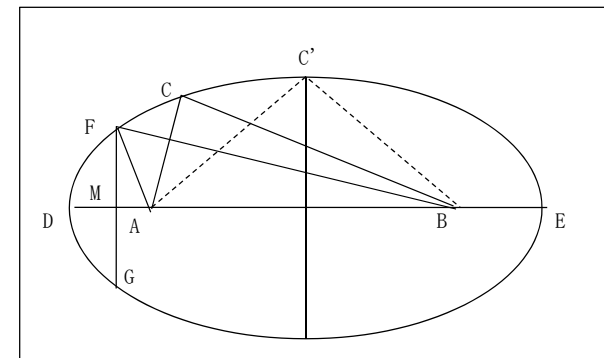
左図のように楕円の長径 a と短径 b を右図のように等脚台形を考えると等脚台形では $BC^2 = DC \cdot AB + BD^2$ だから

$$BC^2 = \frac{\pi^2}{16} ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$4BC^2 = \pi^2 ab + 4(a-b)^2$$

従って楕円周² = $\pi^2 \times \text{長径} \times \text{短径} + 4(\text{長径} - \text{短径})^2$

a は長径、 b は短径、
糸の長さ a+AB, 2AD=長径-AB
糸長=2(AB+AD)=長径+AB
糸長=2AC'+AB



ゆえに $2AC' = a \quad \left(\frac{\text{長径}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\text{短径}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\text{針間}}{2}\right)^2$

針間の距離 = $\sqrt{a^2 - b^2}$ 又 DM=c 矢とすれば弦 FG を求める。

$$\left(\frac{\text{弦}}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} (a-c)c$$

長径 5, 短径 3 の楕円に対して長径を 128 等分して

会田は楕円周 12.7591 6598 5639 6524 0865 2973 をだしている。

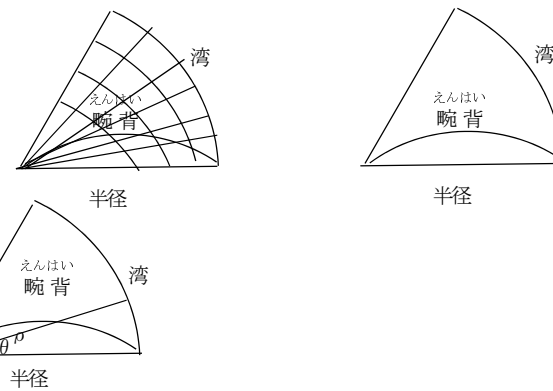
$$(\text{腕背})^2 = \frac{1}{3}(3(\text{半径})^2 + \text{湾}^2)$$

$$(\text{腕背})^2 = (\text{半径})^2 + \frac{1}{3}\text{湾}^2$$

$$\text{腕背} = \text{半径} \sqrt{1 + \frac{1}{3}\text{率}^2}$$

$$\text{率} = \frac{\text{湾}}{\text{半径}}$$

$$= \text{半径} \left(1 + \frac{1}{6}\text{率}^2 - \dots\right)$$



『解見題之法』

安島直円の「腕背術」第2項までと等しくなる。

$$\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \text{を利用して}$$

$$(\text{腕背})^2 = (\text{半径})^2 + (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots) \text{湾}^2$$

したと思われる。

『解見題之法』では近似値で書いている

$$\rho = \frac{p}{n} r, \quad \theta = \frac{p}{n} \alpha$$

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\theta}{\alpha} \quad \rho = \frac{r}{\alpha} \theta$$

$$L = \int_0^\alpha \sqrt{\rho^2 + (\frac{d\rho}{d\theta})^2} d\theta$$

$$= \int_0^\alpha \frac{r}{\rho} \sqrt{1 + (\frac{r}{\alpha})^2} d\theta$$

一般的に $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$ において

$$x = a \tan \theta \text{ とおけば } \sqrt{1 + a^2} = a \sec \theta, \quad dx = a \sec^2 \theta d\theta$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = a^2 \int \sec^3 \theta d\theta \quad \int \sec^3 \theta d\theta = \sec^2 \theta \sec \theta d\theta$$

$$u = \sec \theta, \quad dv = \sec^2 \theta d\theta \text{ とおけば}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{d \sec \theta}{d \theta} = \tan \theta \sec \theta \quad du = \tan \theta \sec \theta d\theta \quad \text{また } v = \int \sec^2 \theta d\theta = \tan \theta$$

$$\int \sec^3 \theta d\theta = uv - \int v du = \tan \theta \sec \theta - \int \tan^2 \theta \sec \theta d\theta$$

置半徑自余三之加入湾背并得数为實
以三為康法同于方除之得背



解術曰半湾背依四分
之一增物得数乃三
分之一擬勾半徑擬
股半徑相得腕背
界二數相得腕背

假如有半圓關半徑若干湾若干
承背準規而測腕形向腕背



『解見題之法』

$$\tan^2 \theta \sec \theta = (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta = \sec^3 \theta - \sec \theta$$

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \tan \theta \sec \theta - \int \sec^3 \theta d\theta + \int \sec \theta d\theta$$

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \tan \theta \sec \theta - \int \sec^3 \theta d\theta + \log(\sec \theta + \tan \theta)$$

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \{ \tan \theta \sec \theta + \log(\sec \theta + \tan \theta) \}$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{a^2}{2} \{ \tan \theta \sec \theta + \log(\sec \theta + \tan \theta) \}$$

$$\text{ここで } \tan \theta = \frac{x}{a}, \quad \sec \theta = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{a^2}{2} \left\{ \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \log \left(\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right) \right\}$$

$$= \frac{a^2}{2} \left\{ \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2} + \log \left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right) \right\}$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \{ x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \}$$

ゆえに

$$\int_0^\alpha \frac{r}{\rho} \sqrt{1 + (\frac{r}{\alpha})^2} d\theta = \frac{r}{2\rho} \{ \rho \sqrt{1 + \rho^2} + \log(\rho + \sqrt{1 + \rho^2}) \}$$

$$= \frac{r}{2} \left\{ (1 + \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{2 \cdot 4} \rho^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \rho^6 - \dots) \right.$$

$$\left. + (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\rho^4}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\rho^6}{7} + \dots) \right\}$$

『解題之法』

立元第一、加減第二附併、相乘第三附見乘、相消第四、開方第五附得商の五つに分かれている。

数字係数法の解法を述べたもの。いわゆるホーナーの近似法が示してある。

傍書法と代数記号による演段術の創始、後に点竄術となる。

傍書法は文字の左側に傍線を書くことで代数的な記号に為す。

算木(算籌)は縦に置く

一 二 三 四 五 六 七 八 九(奇数位)

| || ||| |||| | | | |

一 二 三 四 五 六 七 八 九(偶数位)

- = ≡ ≡ ≡ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥

≡0 | は 301, || - \ は -211 を表す

加法 甲+乙 は | 甲
| 乙 または | 甲 | 乙

減法 甲-乙 は | 甲
\ 乙 または | 甲 \ 乙

乗法 甲×乙は | 甲乙 ,

除法 甲÷天+乙÷地は 天 | 甲
地 | 乙

假如 算木(算籌)の用法に関する説明。算木は縦に置き、奇数位と偶数位を区別する。算木は縦に置き、奇数位と偶数位を区別する。算木は縦に置き、奇数位と偶数位を区別する。

『解題之法』

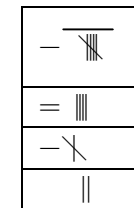
|| 甲商
| 乙 は $2\sqrt{甲}+乙$

3 次方程式 $2x^3-11x^2+24x-18=0$

立商 1 をたて

商 1 個

$$\begin{array}{r} ① \quad 1) \quad 2 \quad -11 \quad 24 \quad -18 \\ \quad \downarrow 2 \times 1 \quad -9 \times 1 \quad 15 \times 1 \\ \quad 2 \quad -9 \quad 15 \quad \underline{-3} \\ \quad \downarrow 2 \times 1 \quad -7 \times 1 \\ \quad 2 \quad -7 \quad \underline{8} \\ \quad \downarrow 2 \times 1 \\ \quad \underline{2} \quad \underline{-5} \end{array}$$

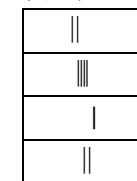


重線アンダーラインは $x=u+1$ とした時の係数

3 次方程式 $2u^3-5u^2+8u-3=0$

商 1 個

$$\begin{array}{r} ② \quad 1) \quad 2 \quad -5 \quad 8 \quad -3 \\ \quad \downarrow 2 \times 1 \quad -3 \times 1 \quad 5 \times 1 \\ \quad 2 \quad -3 \quad 5 \quad \underline{-2} \\ \quad \downarrow 2 \times 1 \quad -1 \times 1 \\ \quad 2 \quad -1 \quad \underline{4} \\ \quad \downarrow 2 \times 1 \\ \quad \underline{2} \quad \underline{1} \end{array}$$



破線アンダーラインは $u=v+1$ とした時の係数

3 次方程式 $2v^3+v^2+4v+2=0$

算木(算籌)の用法に関する説明。算木は縦に置き、奇数位と偶数位を区別する。算木は縦に置き、奇数位と偶数位を区別する。算木は縦に置き、奇数位と偶数位を区別する。

負商五分

0
≡ ≡
ㄥ

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{3}-0.5) \quad 2 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \\
 \underline{\downarrow 2 \times 0.5 \quad 0 \times 0.5 \quad 4 \times 0.5} \\
 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \\
 \underline{\downarrow 2 \times 0.5 \quad -1 \times 0.5} \\
 \quad 2 \quad -1 \quad 4.5 \\
 \underline{\downarrow 2 \times 0.5} \\
 \quad 2 \quad -2
 \end{array}$$

波線アンダーラインは $w=v-1$ とした時の係数

3次方程式 $2w^3-2w^2+4.5w+0=0$

$$x=1+1-0.5=1.5(\text{定商})\text{としている。}$$

『解伏題之法』

本書は真虚第一、両式第二附略省約縮、定乘第三附疊括、換式第四附艾治、生剋第五附交式斜乘、寄消第六の六編に分かれている。

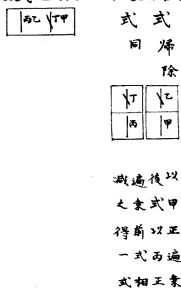
関孝和が考えた行列式は『解見題之法』(貞亨2年1685年以前)・『解隠題之法』(貞亨2年1685年)・『解伏題之法』(訂補版天保3年1683年)の三部抄の中の一つ『解伏題之法』のなかにある。これは2変数の整式から1変数を消去する術法として行列式を用いたものである。

真虚第一で方程式の作り方に始まり、換式第四附艾治で m 次と n 次($m>n$)の両式が与えられた場合に n 次に導く方法を示している。

$$\begin{cases}
 \text{甲}x - \text{乙} = 0 \\
 \text{丙}x - \text{丁} = 0
 \end{cases}$$

より $\text{乙丙} - \text{甲丁} = 0$ (一式)

$$\begin{cases}
 -\text{丙} - \text{乙}x + \text{甲}x^2 = 0 \dots\dots\dots(1) \\
 -\text{己} + \text{戊}x - \text{丁}x^2 = 0 \dots\dots\dots(2)
 \end{cases}$$



(1)×丁+(2)×甲

$$\begin{cases}
 -\text{丙丁} - \text{乙丁}x + \text{甲丁}x^2 = 0 \\
 -\text{甲己} + \text{甲戊}x - \text{甲丁}x^2 = 0
 \end{cases}$$

$$-(\text{丙丁} + \text{甲己}) + (-\text{乙丁} + \text{甲戊})x = 0$$

(1)×己-(2)×丙

$$(\text{丙戊} + \text{乙己}) - (\text{丙丁} + \text{甲己})x = 0$$

さらに3次式の場合

$$\begin{cases}
 -\text{丁} + \text{丙}x + \text{乙}x^2 - \text{甲}x^3 = 0 \dots\dots\dots(3) \\
 -\text{辛} - \text{庚}x + \text{己}x^2 + \text{戊}x^3 = 0 \dots\dots\dots(4)
 \end{cases}$$

(3)×戊+(4)×甲

$$-\text{戊丁} + \text{戊丙}x + \text{戊乙}x^2 - \text{戊甲}x^3 = 0$$

$$-\text{甲辛} - \text{甲庚}x + \text{甲己}x^2 + \text{甲戊}x^3 = 0$$

$$(\text{戊丁} + \text{辛甲}) + (-\text{戊丙} + \text{庚甲})x + (-\text{戊乙} - \text{己甲})x^2 = 0 \dots\dots\dots(5)$$

(3)×己+(4)×乙に(5)より $(\text{戊乙} + \text{己甲})x^2 = (\text{戊丁} + \text{辛甲}) + (-\text{戊丙} + \text{庚甲})x$ を代入して

$$(\text{己丁} - \text{辛乙}) + (-\text{己丙} - \text{庚乙} + \text{戊丁} + \text{辛甲})x + (-\text{戊丙} + \text{庚甲})x^2 = 0$$

(3)×辛-(4)×丁

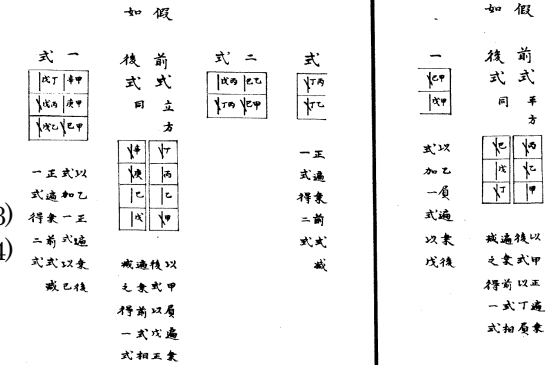
$$(-\text{庚丁} - \text{辛丙}) + (\text{己丁} - \text{辛乙})x + (\text{戊丁} + \text{辛甲})x^2 = 0 \quad (\text{二式})$$

これから n 次式から $n-1$ 次式への導き方がわかり、これで行列式を導く準備が終る。次に生剋第五附交式斜乗で行列式の展開が示されている。

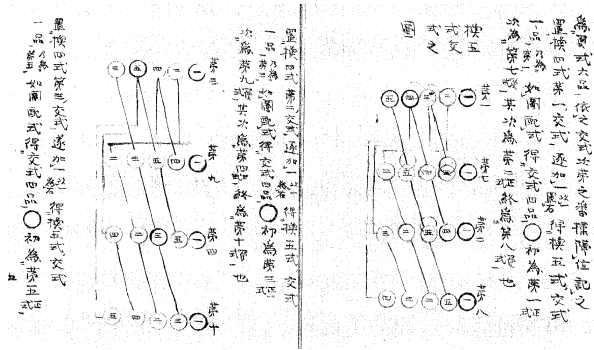
$$\begin{cases}
 A + Bx + Cx^2 = 0 \dots\dots\dots(6) \\
 D + Ex + Fx^2 = 0 \dots\dots\dots(7) \\
 G + Hx + Lx^2 = 0 \dots\dots\dots(8)
 \end{cases}$$

$$(6) \times EL + (7) \times HC + (8) \times BF - (6) \times HF - (7) \times BL - (8) \times CE$$

$$\begin{cases}
 AE L + BE Lx + CE Lx^2 = 0 \dots\dots\dots(9) \\
 DHC + EHCx + FHCx^2 = 0 \dots\dots\dots(10) \\
 GBF + HBFx + LBFx^2 = 0 \dots\dots\dots(11)
 \end{cases}$$



訂正したのは松永良弼の『解伏題交式斜乗之諺解』である。
換五式の場合は原文の図は全て右斜乗が生(正)で、左斜乗が剋(負)となっているが交互に生剋になるべきであり、この誤りについては、関の著書の115年後寛政10年(1798年)石黒信由と菅野元健の兩人によって独自に訂正した。



『解伏題交式斜乗逐索』石黒信由著(寛政10年1798)

ラタニコ	キロケツ	ヤムレルホ	如 五式 コノ フ井 ケツ マム ヤラ	假 三式 ツラ ソル レス タリ ヨ千	右生一十二位 剋一十二位 共二十四位也
生	生	生			
○	○	○			
ラタニコ	キロケツ	ヤムレルハ			
ラタニコ	キロケツ	ヤムレルロ			
イリレホ	イリハフ	イマウソ			
生	生	生			
○	○	○			
イリレホ	イリハフ	イマウソ			
イリレケ	イリハフ	イマウソ			
イリレマ	イリハフ	イマウソ			
イリレヤ	イリハフ	イマウソ			

『解伏題生剋篇』菅野元健著(寛政10年1798)

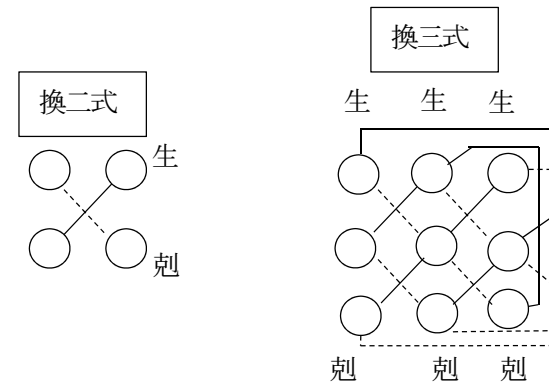
$$\begin{vmatrix} ABCD \\ EFGH \\ IJKL \\ MNOP \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ABCD \\ EFGH \\ IJKL \\ MNOP \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ADBC \\ EHFH \\ ILJK \\ MPNO \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ACDB \\ EGHF \\ IKLJ \\ MOPN \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & aDGJM + bCFIP + cBELO + dAHKN - eAFKP - fBGLM - gCHIN - hDEJO \\ & + (iCFLM + jBHIO + kDEKN + lAJKP - mAHJO - nBGPI - oCNLE - \\ & pDFKM) \\ & - (qBHKM + rDGIN + sCEJP + tAFLO - uAGLN - vCHJM - wDFIO - \\ & xBEKP) \end{aligned}$$

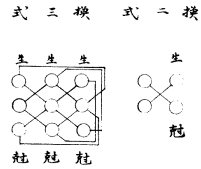
(確認)

$$\begin{vmatrix} ABCD \\ EFGH \\ IJKL \\ MNOP \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} FG H \\ JKL \\ NOP \end{vmatrix} - B \begin{vmatrix} EGH \\ IKL \\ MOP \end{vmatrix} + C \begin{vmatrix} EFH \\ IJL \\ MNP \end{vmatrix} - D \begin{vmatrix} EFG \\ IJK \\ MNO \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & A(dHKN + lGJP + tFOL - eFKP - uGLN - mHJO) - B(qHKM + mGIP + cELO \\ & - xEKP - fGLM - jHIO) + C(vHJM + bFIP + oENL - sEJP - iFLM - gHIN) \\ & - D(aGJM + wFIO + kEKN - hEJO - pFKM - rGIN) \end{aligned}$$

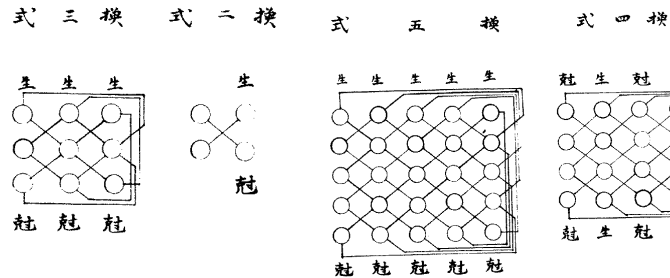


実線は掛けて生(正で朱線で書いている)、破線は掛けて剋(負は黒線で描いている)とする。

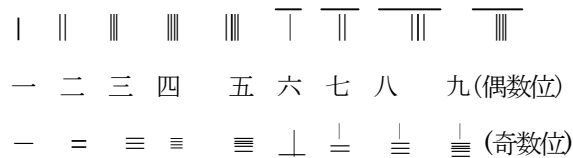


之式各布之從先右斜乘而得生剋也
 剋偶者先斜乘右斜乘共生剋相交也
 斜乘者當為

	送	順	送
剋	四	三	二
斜	三	二	一
乘	二	一	
	五	四	三
	四	三	二
	三	二	一
	二	一	
	一		



原文では実線を赤線で正を表し、点線は黒線で負を表している。



仮に

三式	二式	一式
⚊ 壬	⚊ 己	⚊ 丙
⚊ 辛	⚊ 戊	⚊ 乙
⚊ 庚	⚊ 丁	⚊ 甲

$$\begin{cases} -3丙 + 乙x + 2甲x^2 = 0 & \dots\dots\dots 一式 \\ 3己 - 5戊x + 丁x^2 = 0 & \dots\dots\dots 二式 \\ -1壬 + 4辛x - 3庚x^2 = 0 & \dots\dots\dots 三式 \end{cases}$$

生 丙戊庚相乘 $\equiv \equiv \equiv$ 45 消

生 己辛甲相乘 $\equiv \equiv \equiv$ 32 寄

生 壬乙丁相乘 $\equiv \equiv \equiv$ -1 消

剋 丙辛丁相乘 $\equiv \equiv \equiv$ -12 寄

剋 己乙癸相乘 $\equiv \equiv \equiv$ -12 寄

剋 壬戊甲相乘 $\equiv \equiv \equiv$ 10 消

$-45 - 10 - 1 = 32 + 12 + 12$ 0 となる。

和算に於いて、行列式のことは西洋数学より早く研究されていた。

関孝和の『解伏題之法』(1683)が一番早いものであるが、あと

いぜきともとき 井関知辰『算法發揮』(1690)、たなかよしざね 田中由真『算学紛解』(1690年頃)、松永良弼『解伏題交式斜乘之診解』(1715)、久留島義太『久氏遺稿』(年代不詳)などがある。